

(۳ نمره)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الف) فرض کنید $tr(AA^t)$ و AA^t مطلوبست.

ب) ماتریس تحویل یافته سطری پله ای هم ارز سطری با A را بدست آورید.

ج) یک پایه برای فضای سطری A بدست آورید.

(۲ نمره)

(۲) به ازای چه مقادیری از x, y, z, t تساوی زیر برقرار است:

$$x \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(۲ نمره)

(۳) با استفاده از درمیان نشان دهید ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ معکوس پذیر است و معکوس آن را بدست آورید.

(۲ نمره)

(۴) با ذکر دلیل مشخص کنید که کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیرفضای \mathbb{R}^4 می‌باشند.

$$W_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c\} \quad \text{الف)}$$

$$W_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b^2\} \quad \text{ب)}$$

(۳ نمره)

(۵) الف) نشان دهید مجموعه $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 است.

ب) مختصات بردار $(4, 2, 8)$ را نسبت به پایه \mathcal{B} بدست آورید.

(۳ نمره)

(۶) الف) نشان دهید نگاشت $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x, y) = (x + 3y, 2x - y)$ یک تبدیل خطی است.

ب) نمایش ماتریسی T را نسبت به پایه استاندارد $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ از \mathbb{R}^2 بدست آورید.

(۳ نمره)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الف) فرض کنید $rank A$ و $null A$ مطلوبست.

ب) با ذکر دلیل مقدار $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(M_4(\mathbb{R}), \mathbb{R}^4)$ را مشخص کنید.

ج) فرض کنید $A \in M_4(\mathbb{R})$ و $C_A(x) = (x^2 - 1)(x^3 - 4x^2 + 3)$. مطلوبست $tr A$ و $\det A$.

(۲ نمره)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۸) چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

(۲ نمره)

۹) (پاداش) فرض کنید $A \in M_2(\mathbb{R})$. نشان دهید $\det(I + A) = 1 + \det A$ اگر و فقط اگر $tr A = 0$.

(موفق باشید)