مسائل مدول‌ها

۱) فرض کنید $f:\mathbb{Z}(\sqrt{2})\to\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ نگاشتی با ضابطهٔ $f(a+b\sqrt{2})=a+b$ باشد. نشان دهید f یک $\mathbb{Z}$-همومورفیسم است ولی همومورفیسم حلقه یا $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$- همومورفیسم نیست. (توجه کنید که $\mathbb{Z}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$)

۲) فرض کنید A یک گروه آبلی باشد و $n\in\mathbb{N}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a\in A$، $na=0$. ثابت کنید A با تعریف زیر یک $\mathbb{Z}_n$- مدول است.

$$[r]\in\mathbb{Z}_n\ ,\ a\in A\ ,\ \ [r].a=ra$$

۳) فرض کنید R حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. نشان دهید نگاشت $f:R\times R\to R$ یک R - همومورفیسم است اگر و فقط اگر $\alpha,\beta\in R$ موجود باشند بطوریکه برای هر $x,y\in R$، $f(x,y)=\alpha x+\beta y$.

۴) (لم ددکند) فرض کنید M یک R - مدول و A، B و C زیرمدول M باشند بطوریکه $C\subseteq A$. ثابت کنید

$$A\bigcap(B+C)=(A\bigcap B)+C$$

۵) نشان دهید $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Q}$- مدول متناهیاً تولید شده است ولی به عنوان گروه آبلی یا به عنوان $\mathbb{Z}$- مدول متناهیاً تولید شده نیست.

۶) فرض کنید I ایده آل چپ حلقهٔ R و M یک R - مدول باشد و $X\subseteq M$. ثابت کنید

الف) $IX=:\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\mid r_i\in I,\,x_i\in X,\,n\in\mathbb{N}\}\leq_R M$

ب) $\frac{M}{IM}$ با تعریف زیر یک $\frac{R}{I}$- مدول است:

$$r\in R\ ,\ x\in M\ ,\ (r+I).(x+IM)=rx+IM$$

۷) فرض کنید A و B هردو R- مدول باشند. نشان دهید $\mathrm{ann}_R(A+B)=\mathrm{ann}_R(A)\bigcap\mathrm{ann}_R(B)$.

۸) فرض کنید A یک R-مدول ساده باشد و $0\neq a\in A$. نشان دهید $f:R\to A$ با ضابطهٔ $f(r)=ra$ یک R-همومورفیسم است و نتیجه بگیرید $A\underset{R}{\cong}\frac{R}{\mathrm{ann}_R(a)}$.

۹) فرض کنید R حلقهٔ جابجایی، I ایده‌آل واقعی R و M یک R-مدول باشد. ثابت کنید اگر I عضو ماکزیمال مجموعهٔ $\mathcal{A}=\{\mathrm{ann}_R(x)\mid 0\neq x\in M\}$ باشد آنگاه I ایده آل اول R است.

۱۰) فرض کنید R یک حلقه و M یک R - مدول باشد ثابت کنید $\varphi:R\to\mathrm{End}_R M$ با ضابطهٔ

$$r\in R\ ,\ m\in M\ ,\ \varphi(r)(m)=r.m$$

یک R- همومورفیسم است. (توجه کنید که $\mathrm{End}_R M$ ،مجموعهٔ همهٔ R-اندومورفیسم‌های M، با عمل جمع توابع و ضرب

$$r\in R\ ,\ x\in M\ ,\ f\in\mathrm{End}_R(M)\ \ ,\ \ (r.f)(x)=r.f(x)$$

یک R-مدول است.)

۱۱) فرض کنید R حلقهٔ یکدار و M گروه آبلی باشد. ثابت کنید M یک R - مدول یکانی است اگر و فقط اگر یک همومورفیسم حلقه مانند $\varphi : R \to \mathrm{End}\,M$ وجود داشته باشد بطوریکه $\varphi(1) = i_M$. (توجه کنید که $\mathrm{End}\,M$، مجموعهٔ همهٔ اندومورفیسم-های گروه M، با عمل جمع و ترکیب توابع یک حلقه است)

۱۲) فرض کنید $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \xrightarrow{g} D$ دنبالهٔ دقیقی از R-مدول‌ها و R-هومومورفیسم‌ها باشد. نشان دهید f پوشاست اگر و فقط اگر g یک به یک باشد.

۱۳) فرض کنید $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow A_4 \xrightarrow{g} A_5$ دنبالهٔ دقیقی از R-مدول‌ها و R-هومومورفیسم‌ها باشد بطوریکه f پوشا و g یک به یک است. نشان دهید $A_3 = 0$.

۱۴) فرض کنید $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ و $0 \longrightarrow C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E \longrightarrow 0$ دو دنبالهٔ دقیق از R-مدول‌ها و R-هومومورفیسم‌ها باشند. نشان دهید دنبالهٔ زیر نیز دقیق است.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h\circ g} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

۱۵) فرض کنید A و B هردو R - زیرمدول M باشند. R-هومومورفیسم‌های f و g را طوری تعریف کنید که دنبالهٔ زیر دقیق باشد.

$$0 \longrightarrow A \cap B \xrightarrow{f} A \times B \xrightarrow{g} A + B \longrightarrow 0$$

۱۶) فرض کنید A و B هردو R-زیرمدول M باشند.

الف) R-هومومورفیسم‌های f و g را طوری تعریف کنید که دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow \frac{M}{A \cap B} \xrightarrow{f} \frac{M}{A} \times \frac{M}{B} \xrightarrow{g} \frac{M}{A+B} \longrightarrow 0$$

دقیق باشد و نتیجه بگیرید

$$\frac{A+B}{A \cap B} \underset{R}{\cong} \frac{A+B}{A} \times \frac{A+B}{B}$$

۱۷) فرض کنید $f : A \to A$ یک R-هومومورفیسم باشد بطوریکه $f \circ f = f$. ثابت کنید $A = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

۱۸) فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to A$، R-هومومورفیسم باشند بطوریکه $g \circ f = i_A$. ثابت کنید $B = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker g$.

۱۹) فرض کنید دیاگرام زیر متشکل از R-مدول‌ها و R-هومومورفیسم‌ها جابجایی باشد و دنباله‌های (۱) و (۲) دقیق باشند.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 & & (1) \\
\alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & & \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 & & (2)
\end{array}$$

ثابت کنید

الف) اگر α_1 پوشا و α_2 و α_4 یک به یک باشند آنگاه α_3 نیز یک به یک است.

ب) اگر α_5 یک به یک و α_2 و α_4 پوشا باشند آنگاه α_3 نیز پوشاست.

۲۰) فرض کنید $f : A \to B$ یک R- همومورفیسم باشد. ثابت کنید

الف) f یک به یک است اگر و فقط اگر برای هر دو R- همومورفیسم $g,h : D \to A$ رابطهٔ $f \circ g = f \circ h$ نتیجه دهد $h = g$.

ب) f پوشاست اگر و فقط اگر برای هر دو R- همومورفیسم $g,h : B \to D$ رابطهٔ $g \circ f = h \circ f$ نتیجه دهد $h = g$.

۲۱) فرض کنید R یک حلقه، S زیرحلقهٔ R و M یک R- مدول باشد. نشان دهید

الف) $\mathbf{Hom}_S(R,M)$ با ضرب زیر یک R- مدول است.

$$r,x \in R \ , \ f \in \mathbf{Hom}_S(R,M) \ \ , \ \ (r.f)(x) = f(xr)$$

ب) اگر R حلقهٔ یکدار باشد آنگاه $\mathbf{Hom}_R(R,M) \underset{R}{\cong} M$.

ج) $\mathbf{End}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ و $\mathbf{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

۲۲) اعضای هر کدام از $\mathbb{Z}$ -مدول‌های زیر را م شخص کنید.

الف) $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ ب) $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z})$ ج) $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})$

۲۳) ثابت کنید $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} \mathbb{Z}_d$ که d بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.

۲۴) فرض کنید $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_۲$ اپی مورفیسم کانونی باشد. نشان دهید $\mathbb{Z}$ -همورفیسم القائی

$$\bar{\pi} : \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_۲,\mathbb{Z}) \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_۲,\mathbb{Z}_۲)$$

صفر است.

۲۵) فرض کنید M و N دو R - مدول باشند و I ایده آلی از R باشد بطوریکه $IM = ۰ = IN$. ثابت کنید

$$\mathbf{Hom}_R(M,N) = \mathbf{Hom}_{\frac{R}{I}}(M,N)$$

۲۶) یک R-مدول سادهٔ M آزاد است اگر و فقط اگر R حلقهٔ تقسیم باشد و $\mathbf{rank}_R M = ۱$.

۲۷) فرض کنید F یک R − مدول آزاد و $\mathcal{B}$ پایه‌ای از آن باشد. برای هر $x \in \mathcal{B}$، نگاشت $f_x : F \to R$ را روی پایهٔ $\mathcal{B}$ به صورت

$$f_x(y) = \begin{cases} ۱ & y = x \\ ۰ & y \neq x \end{cases}$$

تعریف می کنیم و آن را به صورت خطی به F گسترش می‌دهیم. نشان دهید

الف) $\mathcal{B}^* = \{f_x \mid x \in \mathcal{B}\}$ یک زیر مجموعهٔ مستقل خطی از $\mathbf{Hom}_R(F,R)$ می باشد و $|\mathcal{B}| = \left|\mathcal{B}^*\right|$.

ب) اگر $\mathcal{B}$ متناهی باشد آنگاه $\mathcal{B}^*$ یک پایه برای $\mathbf{Hom}_R(F,R)$ می‌باشد.

۲۸) فرض کنید R یک حلقه باشد. نشان دهید هر R-مدول پروژکتیو است اگر و فقط اگر هر R-مدول انژکتیو باشد.

۲۹) فرض کنید M یک R-مدول نوتری و $f : M \to M$ یک R-اپی مورفیسم باشد. ثابت کنید f یک R-ایزومورفیسم است.

۳۰) فرض کنید M یک R-مدول آرتینی و $f : M \to M$ یک R-مونومورفیسم باشد. ثابت کنید f یک R-ایزومورفیسم است.

۳۱) فرض کنید M یک R-مدول و N و K زیرمدول های M باشند. ثابت کنید اگر $\frac{M}{N}$ و $\frac{M}{K}$ نوتری (آرتینی) باشند آنگاه $\frac{M}{N \bigcap K}$ نیز نوتری (آرتینی) است.

۳۲) فرض کنید M یک R-مدول و I ایده‌آلی از R باشد بطوریکه $IM = ۰$. ثابت کنید M به عنوان R-مدول نوتری (آرتینی) است اگر و فقط اگر M به عنوان $\frac{R}{I}$-مدول نوتری(آرتینی) باشد.

۳۳) فرض کنید G یک گروه آبلی باشد که به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول نوتری و آرتینی است. نشان دهید G گروه متناهی است.

۳۴) فرض کنید M یک R-مدول متناهیاً تولید شده و I ایده آلی از R باشد بطوریکه $I \subseteq J(R)$. ثابت کنید اگر N زیرمدول M باشد بطوریکه $IM + N = M$ آنگاه $M = N$. (R حلقهٔ یکدار)

۳۵) فرض کنید R یک حلقهٔ یکدار باشد و $x \in J(R)$. ثابت کنید اگر به ازای $n \geq ۲$، $x^n = x$ آنگاه $x = ۰$.

۳۶) فرض کنید R یک حلقهٔ یکدار و I یک ایده آل چپ(راست یا دوطرفه) پوچتوان باشد. ثابت کنید $I \subseteq J(R)$ و نتیجه بگیرید $N(R) \subseteq J(R)$.

۳۷) فرض کنید R حلقهٔ یکدار و I ایده‌آلی از آن باشد. ثابت کنید $\frac{J(R)+I}{I} \subseteq J(\frac{R}{I})$ و اگر $I \subseteq J(R)$ آنگاه تساوی برقرار است.

۳۸) فرض کنید $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ خانواده‌ای ناتهی از حلقه‌های یکدار باشد. ثابت کنید $J(\prod\limits_{\alpha\in\Omega} R_\alpha) = \prod\limits_{\alpha\in\Omega} J(R_\alpha)$.

۳۹) فرض کنید R حلقهٔ یکدار باشد که مقسوم‌علیه‌صفر ندارد. ثابت کنید اگر R آرتینی چپ(راست)باشد آنگاه R حلقهٔ تقسیم است.

۴۰) فرض کنید R حلقهٔ جابجایی باشد بطوریکه برای هر ایده آل غیرصفر I از R، حلقهٔ $\frac{R}{I}$ نوتری است. نشان دهید R نوتری است.

۴۱) حلقه‌ای جابجایی مانند R را مثال بزنید که آرتینی نباشد اما برای هر ایده آل غیرصفر I از R، حلقهٔ $\frac{R}{I}$ آرتینی باشد.

۴۲) فرض کنید R حلقهٔ یکدار و نیمساده باشد. ثابت کنید اگر I ایده آل راست و J ایده آل چپ R باشند آنگاه $IJ = I \bigcap J$.

۴۳) فرض کنید R حلقهٔ یکدار و نیمساده باشد. ثابت کنید برای هر سه ایده آل I، J و K از R داریم،

الف) $I \bigcap (J+K) = (I \bigcap J) + (I \bigcap K)$ ب) $I + (J \bigcap K) = (I+J) \bigcap (I+K)$