هوالعلیم

دانشگاه تبریز

مبانی هندسه دیفرانسیل،

ریاضیات و کاربردها، آزمون میان ترم

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

۱۴۰۳/۱۰/۱۲

مدرس: فغفوری[۱]

وقت: ۶۰ دقیقه

---

۱. فرض کنید $F: E^3 \to E^3$ و $p \in E^3$ و v بردار مماس در نقطه p باشد. $F_{*p}(v)$ را تعریف کرده برای
$$F(x,y,z) = (x\cos y, x\sin y, z), p = (1,0,1), v = (2,-1,3)$$
مقدار $F_{*p}(v)$ را محاسبه کنید. (۲ نمره)

جواب: تمرین کتاب و در کلاس حل شده.

۲. مارپیچ استوانه‌ای را تعریف کرده، ثابت کنید خم با معادلات $x = \frac{2}{3}t, y = t^2, z = t^3$ مارپیچ استوانه‌ای است. (۲ نمره)

حل: تعریف مارپیچ استوانه‌ای در کتاب موجود است، برای قسمت دوم خم α را بصورت زیر تعریف میکنیم

$$\alpha(t) = (\frac{2}{3}t, t^2, t^3)$$

مشتقات خم α را حساب می کنیم.

$$\alpha'(t) = (\frac{2}{3}, 2t, 3t^2)$$
$$\alpha''(t) = (0, 2, 6t)$$
$$\alpha'''(t) = (0, 0, 6)$$

اندازه سرعت را حساب می کنیم.

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\frac{4}{9} + 4t^2 + 9t^4} = \sqrt{(\frac{2}{3} + 3t^2)^2} = \frac{2}{3} + 3t^2$$

یعنی پارامتر طول قوسنیست. برای محاسبه انحنا و تاب از روابط زیر باید استفاده کنیم.

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6t^2, -4t, \frac{4}{3})$$
$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = 2\sqrt{(9t^4 + 4t^2 + \frac{4}{9})} = 2\sqrt{(3t^2 + \frac{2}{3})^2} = 2(3t^2 + \frac{2}{3})$$

$$\kappa(t) = \frac{2(3t^2 + \frac{2}{3})}{(\frac{2}{3} + 3t^2)^3}, \quad \tau(t) = \frac{8}{4(3t^2 + \frac{2}{3})^2}$$

$$\kappa(t) = \frac{2}{(3t^2 + \frac{2}{3})^2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{(3t^2 + \frac{2}{3})^2}$$

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{2}{(3t^2+\frac{2}{3})^2}}{\frac{2}{(3t^2+\frac{2}{3})^2}} = 1$$

چون نسبت تاب به انحناء مقدار ثابت شد بنابه قضیه‌ی این خم یک مارپیچ استوانه‌ای است.

---

[۱] *E-mail:* faghfouri_m@yahoo.com

۳. اجزاء کنج فرنه یعنی κ, τ, T, N, B را برای خم زیر پیدا کرده ثابت کنید آن یک دایره است، مرکز، شعاع آن و صفحه‌ی که دایره در آن قرار دارد را پیدا کنید.

$$\alpha(t) = (\frac{۲}{۵}\sin ۲t, ۳ - \frac{۱}{۲}\cos ۲t, ۱ - \frac{۳}{۱۰}\sin ۲t)$$

(۴ نمره)

حل: مشتقات خم α را حساب می کنیم.

$$\alpha'(t) = (\frac{۴}{۵}\cos ۲t, \sin ۲t, -\frac{۳}{۵}\cos ۲t)$$
$$\alpha''(t) = (-\frac{۸}{۵}\sin ۲t, ۲\cos ۲t, \frac{۶}{۵}\sin ۲t)$$

اندازه سرعت را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned}|\alpha'(t)| &= \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}\cos^۲(۲t) + \sin^۲(۲t) + \frac{۹}{۲۵}\cos^۲(۲t)}\\ &= \sqrt{(\frac{۱۶}{۲۵} + \frac{۹}{۲۵})\cos^۲(۲t) + \sin^۲(۲t)}\\ &= \sqrt{\cos^۲(۲t) + \sin^۲(۲t)} = ۱\end{aligned}$$

یعنی پارامتر طول قوس است $T(t) = \alpha'(t)$. اندازه شتاب همان انحنا خواهد بود.

$$\begin{aligned}\kappa(t) = |\alpha''(t)| &= ۲\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}\sin^۲(۲t) + \cos^۲(۲t) + \frac{۹}{۲۵}\sin^۲(۲t)}\\ &= ۲\sqrt{(\frac{۱۶}{۲۵} + \frac{۹}{۲۵})\sin^۲(۲t) + \cos^۲(۲t)}\\ &= ۲\sqrt{\sin^۲(۲t) + \cos^۲(۲t)} = ۲\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\kappa(t)} &= \frac{۱}{۲}(-\frac{۸}{۵}\sin ۲t, ۲\cos ۲t, \frac{۶}{۵}\sin ۲t)\\ &= (-\frac{۴}{۵}\sin ۲t, \cos ۲t, \frac{۳}{۵}\sin ۲t)\end{aligned}$$

$$B = T \times N = (\frac{۳}{۵}, ۰, \frac{۴}{۵})$$
$$B' = ۰$$

چون $B' = -\tau N$ در اینصورت $\tau = ۰$. چون انحناء ثابت و تاب صفر است در اینصورت α قسمتی از یک دایره به شعاع

$$R = \frac{۱}{\kappa} = \frac{۱}{۲}$$

و به مرکز

$$C = \alpha(t) + \frac{۱}{۲}N(t) = (۰, ۳, ۱)$$

می باشد، همچنین این دایره در صفحه‌ای قرار دارد که بردار نرمال آن B و از نقطه C گذشته باشد. بنابراین معادله این صفحه بصورت زیر خواهد بود.

$$\frac{۳}{۵}(x - ۰) + ۰(y - ۳) + \frac{۴}{۵}(z - ۱) = ۰$$

یا

$$۳x + ۴(z - ۱) = ۰$$

۴. سه وجهی

$$e_۱ = (\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}), e_۲ = (-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}), e_۳ = (\frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

در نقطه $p = (۰, ۱, ۰)$ و سه وجهی

$$f_۱ = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}}), f_۲ = (۰, ۱, ۰), f_۳ = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, -\frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

در نقطه $q = (۳, -۱, ۱)$ در نظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین ایزومتری $F = TC$ که سه وجهی e را به سه وجهی f بدل می‌کند. (۲ نمره)

جواب: تمرین کتاب و در کلاس حل شده.

«موفق باشید»