معادلات دیفرانسیل

یک معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ای است بین x و تابع $y = f(x)$ و مشتقات آن نسبت به x یعنی y' و y'' و $y^{(n)}$.

نکته: اگر تابع $y = f(x)$ تابعی از یک متغیر مستقل باشد آن را معادله‌ی دیفرانسیل معمولی گویند.

نکته: مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل بالاترین مرتبه‌ی مشتق است که در معادله ظاهر شده است به عنوان مثال:

$1 - \quad xy' + 2y'' = 5x + 1$ مرتبه دوم

$2 - \quad y''' + xy'' = 2x^2$ مرتبه سوم

$3 - \quad 3y' + y = 5x$ مرتبه اول

جواب معادله‌ی دیفرانسیل:

هر تابع $y = f(x)$ را وقتی که در معادله جایگزین شود و معادله به یک اتحاد تبدیل شود جواب معادله‌ی دیفرانسیلی یا منحنی انتگرال نامیده می‌شود که شامل جواب عمومی و خصوصی می‌باشد.

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول: یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول رابطه‌ایبین y' و y و $f(x)$ می‌باشد.

به عبارت دیگر یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول به شکل مقابل قابل مشاهده است:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

گاهی این معادله را به صورت مقابل نیز می نویسند:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

نکته: اگر در یک معادله‌ی دیفرانسیل که برای y مطرح شده، هیچ ترم غیرخطی از y و مشتقات آن موجود نباشد به آن معادله‌ی دیفرانسیل خطی گویند. همچنین اگر در این معادله تمام ترم ها شامل y و یا یکی از مشتقات آن باشند معادله را همگن می نامند.

جواب عمومی: جواب عمومی یک معادله‌ی دیفرانسیل، جوابی است که شامل یک یا چند پارامتر (ثابت) دلخواه بوده و اگر هر مقدار دلخواهی به ثابت ها نسبت داده شود آن جواب در معادله مورد نظر صدق کند.

نکته: اگر معادله‌ی دیفرانسیل ما از مرتبه‌ی n باشد. جواب معادله‌ی دیفرانسیل شامل n ثابت خواهد بود.

جواب خاص یا خصوصی: اگر جواب عمومی تحت شرایط اولیه یا مرزی مسأله قرار داده شود و مقدار ثابت ها تعیین شوند جواب خصوصی معادله نیز به دست می‌آید.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیل $y' = xe^x$ با شرایط $y_{(1)} = 3$:

جواب:

$$\frac{dy}{dx} = xe^x \rightarrow dy = xe^x dx \rightarrow y = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

$\rightarrow \; y = xe^x - e^x + c$ جواب عمومی

$$y_{(1)} = e^1 - e^1 + c = 3 \quad c = 3$$

$y = e^x(x - 1) + 3$ جواب خصوصی

دسته منحنی‌ها: همان طوری که اشاره گردید جواب عمومی هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول معمولاً شامل یک ثابت اختیاری است که به پارامتری موسوم می‌باشد. به عبارت دیگر یک دسته منحنی تک پارامتری است. بر عکس،منحنی‌های هر دسته پارامتری،منحنی‌های انتگرال یک معادله‌ی دیفرانسیلمرتبه اول است.

روش به دست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل دسته منحنی‌ها: فرض کنید معادله دسته منحنی به صورت مقابل آورده شده است:

$$f(x, y, c) = 0$$

معادله‌ی دیفرانسیلی مربوط به این دسته بدین شکل به دست می‌آید که ابتدا این رابطه به طور ضمنی نسبت به x مشتق گرفته می‌شود تا رابطه همانند زیر به دست آید:

$$f(x, y, y', c) = 0$$

سپس بین این رابطه مقدار ثابت c حذف می‌شود تا معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر به دست آید.

مثال:معادله‌ی دیفرانسیلی دسته منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 2xc$ را به دست آورید.

جواب: همان طوری که مشاهده می‌شود معادله فوق مربوط به دسته منحنی‌های دایره‌ای متحد المرکز می‌باشد.

از مطالب فوق چنین بر می‌آید:

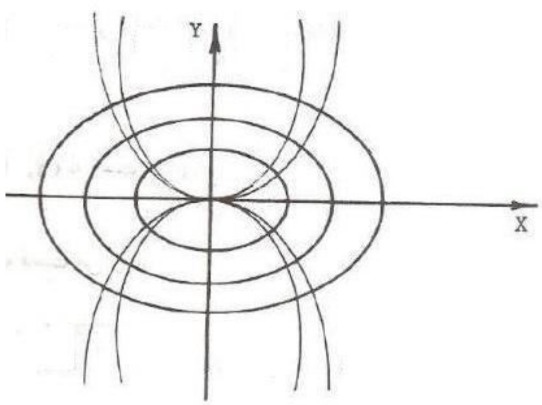
مشتق ضمنی $\rightarrow \quad 2x + 2yy' = 2c \quad \rightarrow \quad c = x + yy'$

جایگذاری در معادله دسته منحنی $\rightarrow x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$

$\rightarrow x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$

نکته:اگر دسته منحنی به بیش از یک پارامتر ثابت بستگی داشت، به عنوان مثال به دو پارامتر بستگی داشت، برای به دست آوردن معادله‌ی دیفرانسیلی آن باید، دو پارامتر از بین معادلات دسته منحنی،مشتق اول و مشتق دوم آن حذف گردد.

مسیرهای متعامد: به عنوان مثال دسته منحنی به معادله $x^2 + y^2 = c$(دایره های متحد المرکز به مرکزی مبدأ مختصات) و دسته خطوط مستقیم که از مبدأ مختصات می‌گذرد را در نظر بگیرید. این دو دسته دارای این خاصیت هستند که هر کدام از منحنی این دسته بر منحنی‌های دسته‌ی دیگر عمود است. اگر چنین رابطه‌ای بین منحنی‌های یک دسته نسبت به منحنی‌های دسته‌ی دیگر بر قرار باشد آن دسته منحنی را دسته منحنی متعامد گویند.



شکل 1

نکته: طبیعی است که اگر معادله‌ی دیفرانسیلی دسته منحنی بـه معادلـه $\frac{dy}{dx} = f(x)$ باشـد، شـیب دسـته منحنی متعامد آن نیز از رابطه‌ی مقابل قابل تعیین است یعنی:

$$\text{شیب دسته منحنی متعامد} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

به عبارت دیگر روش به دست آوردن مسیرهای متعامد یک دسته منحنی به معادله $\frac{dy}{dx} = f(x)$ چنین است که در معادله دسته منحنی به جای $\frac{dy}{dx}$ عبارت $\frac{-dx}{dy}$ را جایگذاری کرده و جواب معادله جدید به دست می‌آید. جواب عمومی به دست آمده معادله مسیرهای متعامد دسته منحنی‌هایمان خواهد بود یعنی:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \leftarrow \text{معادله دسته منحنی}$$

در آن صورت معادله‌ی دیفرانسیلی مسیرهای متعامد به شکل زیر است:

$$-\frac{dx}{dy} = f(x, y) \quad or \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

حال با حل رابطه فوق معادله پارامتری مسیرهای متعامد حاصل می گردد:

مثال: برای دسته منحنی‌هایی به معادله $x^2 + y^2 = c$ مسیرهای متعامد را به دست آورید.

جواب: همان طوری که قبلاً اشاره گردید معادله فوق مربوط به دسته دوایر متحدالمرکز به مرکزیت مبدأ مختصات هستند.

معادله‌ی دیفرانسیلی دسته منحنی‌های فوق (دوایر)

$$2x + 2yy' = 0 \;\rightarrow\; x + yy' = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیلی دسته منحنی های متعامد}} \frac{dy}{dx} = -\frac{dx}{dy}$$

$$\rightarrow -\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow Ln\, y = Ln\, x + c = Lnx + Ln\, k \left(Ln\, k = c \text{ و } k\text{: مقدار ثابت}\right)$$

$\rightarrow y = kx$ معادله دسته منحنی های متعامد

انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول:

در حالت کلی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مشکل است یعنی هیچ فرمولی جواب معادله $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ را در حالت کلی به دست نمی دهد و بعضی از انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تحت شرایطی قابل حل می‌باشند.

1- ساده‌ترین معادله مرتبه‌ی اول، معادله ای است که در آن متغیرها جداشدنی هستند (تفکیک پذیر). یعنی رابطه طوری نوشته شده است که یک طرف تساوی y و dy و توان هایی از y و طرف دیگر x و dx و توان هایی از xمی‌باشد در این صورت معادله را جهت حل کردن می‌توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(y)} \rightarrow f(x)dx = f(y)dy$$

برای به دست آوردن جواب از طرفین تساوی فوق انتگرال گیری می‌شود.

نکته: در صورتی که تابع ما بر حسب x و y به صورت حاصلضرب در معادله باشند از راه جداشدنی یا تفکیک پذیر قابل حل‌اند.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$$(x + 1)dy - (xy^2 + x)dx = 0$$

جواب: با توجه به شکل معادله می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(x + 1)dy - x(y^2 + 1)dx = 0 \rightarrow (x + 1)dy = x(y^2 + 1)dx$$

$$\rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = \frac{xdx}{x+1} \rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{xdx}{x+1} + c$$

$$Arc\tan y = x - Ln\,(x+1) + c \rightarrow y = \tan(x - Ln\,(x+1) + c)$$

مثال:مطلوبست به دست آوردن دسته منحنی‌های متعامد (مسیرهای متعامد) به دسته منحنی به معادله‌ی مقابل:

$$y = cx^2$$

جواب: ابتدا معادله‌ی دیفرانسیلی دسته منحنی فوق به دست می‌آید.

$$y' = 2cx \rightarrow c = \frac{y'}{2x} \rightarrow y = \frac{y'}{2x}.x^2 \rightarrow y = \frac{xy'}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیلی مسیر های متعامد}} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{x} \rightarrow$$

$$2ydy = -xdx \rightarrow \int 2ydy = \int -xdx \rightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} = c^2$$

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{x^2}{2c^2} = 1$$ معادله مسیرهای متعامد (بیضی)

مثال:مطلوبست به دست آوردن جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیلی زیر با شرط اولیه $y_{(0)} = 1$

$$(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$$

جواب:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0 \rightarrow (x^2+1)dy = -(y^2+1)dx$$

$$-\frac{dy}{(y^2+1)} = \frac{dx}{1+x^2} \rightarrow -\int \frac{dy}{(y^2+1)} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\rightarrow -Arc\tan y = Arc\tan x + c$$

$$\rightarrow y = -x + c_1 \rightarrow y_{(0)} = 0 + c_1 = 1 \rightarrow y = -x + 1$$

2- معادلات همگن: تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n است هرگاه برای هر عدد حقیقی t رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

به عنوان مثال توابع:

1) $f(x,y) = xy^3 - 5x^2y^2$

2) $\sqrt{x^2 + y^2}$

3) $\sin\dfrac{y}{x}$

به ترتیب همگن از درجه های 4 و 1 و 0 هستند چرا که:

1) $f(tx,ty) = (tx)(ty)^3 - 5(tx)^2(ty)^2 = t^4xy^3 - 5t^4x^2y^2 = t^4(xy^3 - 5x^2y^2)$

2) $f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = \sqrt{t^2(x^2 + y^2)} = t\sqrt{x^2 + y^2}$

3) $f(tx,ty) = \sin\dfrac{ty}{tx} = \sin\dfrac{y}{x} = t^{\circ}\sin\dfrac{y}{x}$

نکته:معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل را همگن گویند:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

هرگاه M و N خود توابعی همگن و هم درجه باشند. این معادله (معادله فوق) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

در این صورت $f(x,y)$ تابعی همگن از مرتبه‌ی(درجه) صفر خواهد بود.

برای حل معادلات همگن به صورت زیر عمل می‌شود.

ابتدا از تغییر متغیر $Z = \frac{y}{x}$ استفاده می‌شود. در نتیجه معادله تبدیل به معادله‌ی جدا شدنی (تفکیک پذیر) خواهد شد که در نوع 1 بحث شد پس:

$$Z = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; xZ = y \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x\frac{dZ}{dx} + Z$$

مثال:مطلوبستحل معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$$(x+y)dx - (x-y)dy = 0$$

جواب: از شکل معادله فوق مشخص است که معادله‌ی ما همگن از مرتبه‌ی یک است یعنی:

$$Z = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; xZ = y \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x\frac{dZ}{dx} + Z$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{1+Z}{1-Z}$$

$$\frac{1+Z}{1-Z} = Z + x\frac{dZ}{dx} \;\rightarrow\; \frac{Z^2+1}{1-Z} = x\frac{dZ}{dx} \quad , \quad \frac{1-Z}{1+Z}dZ = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-Z}{1+Z}dZ = \int \frac{dx}{x} \;\rightarrow$$

$$Arc\tan Z - \frac{1}{2}Ln\,(Z^2 + 1) = Ln\,x + c$$

$$\rightarrow \quad Arc\tan(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}Ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = Lnx + c$$

نکته: همیشه در یک طرف تساوی معادلات همگن $\frac{dx}{x}$ ظاهر می‌شود. بدین طریق می‌توانن‌حوه‌ی درست انتخاب کردن تغییر متغیر $(Z = \frac{y}{x})$ و جاگذاری آن در معادله اصلی را کنترل کرد.

3- معادله‌ی دیفرانسیل $y' = f(ax + by + c)$ را در نظر بگیرید. معادلات از این قبیل با تغییر متغیر $ax + by + c = Z$ تبدیل به معادله‌هایی جداشدنی می‌شوند.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$$y' = (x + y)^2$$

جواب: طبق دستور العمل 3:

$$x + y = Z \quad \rightarrow \quad dx + dy = dZ \quad \rightarrow \quad dy = dZ - dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dZ - dx}{dx} \quad \rightarrow \quad Z^2 = \frac{dZ}{dx} - 1 \quad , \quad \frac{dZ}{dx} = Z^2 + 1$$

$$\rightarrow \int \frac{dZ}{Z^2 + 1} = \int dx \quad \rightarrow \quad Arc\tan Z = x + c$$

$$\rightarrow \quad Arc\tan(x + y) = x + c$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$$y' = sin^2(x - y + 1)$$

جواب: با توجه به دستور العمل 3:

$$Z = x - y + 1 \quad , \quad dZ = dx - dy \quad \rightarrow \quad dy = dx - dZ$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dZ}{dx} = sin^2 Z \qquad 1 - \ sin^2 Z = \frac{dZ}{dx}$$

$$\frac{dZ}{1 - \ sin^2 Z} = dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{cos^2 Z} dZ = \int dx + c$$

$$\int (1 + tan^2 Z) dZ = \int dx + c \quad \rightarrow \ tan\, Z = x + c \ \rightarrow tan(x - y + 1) = x + c$$

مثال: معادله‌ی مسیرهای متعامد بر دوایری که بر محور y ها مماس باشد را به دست آورید.

جواب: معادله دسته دوایر مماس بر محور y ها عبارتست از:

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2cx \ \rightarrow$$

$$2x + 2yy' = 2c \ \rightarrow \ c = x + yy' \ \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 2(x + yy')x \quad , \quad x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xyy'$$

معادله‌ی دیفرانسیلی دسته دوایر مماس بر محورy ها: $y^2 - x^2 = 2xyy'$

معادله‌ی دیفرانسیلی مسیرهای متعامد:

$$y^2 - x^2 = 2xy\left(-\frac{dx}{dy}\right) \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$Z = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad Z + x\frac{dZ}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \rightarrow \quad \int \frac{(1 - Z)}{Z(1 + Z^2)} dZ = \int \frac{dx}{x} + c$$

$$Ln\, Z - Ln(1 + Z^2) = Lnx + Lnk \quad \rightarrow \quad \frac{Z}{1 + Z^2} = kx$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = kx \quad \rightarrow \quad \frac{xy}{x^2 + y^2} = kx$$

4- معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ را معادلات خطی گویند. جهت به دست آوردن جواب معادلات خطی فوق با توجه به ضرایب عددی a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 ممکن است دو حالت پیش بینی شود:

4- الف – اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد یعنی اگر:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

در این صورت با تغییر متغیر $a_1x + b_1y + c_1 = t$ معادله تبدیل به معادله‌ی جداشدنی خواهد شد که نحوه‌ی به دست آوردن جواب در دستورالعمل 1 آمده است.

مثال:معادله‌ی دیفرانسیلی زیر را حل کنید:

$$(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$$

جواب: همان طوری که مشاهده می کنید معادله فوق از نوع تفکیک شدنی نیست و در ضمن همگن نیز نمی‌باشد. پس دستور العمل 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = t \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$dx + dy = dt \quad \rightarrow \quad dy = dt - dx$$

$$tdx + (3t - 4)(dt - dx) = 0 \quad \rightarrow \quad tdx + 3tdt - 3tdx - 4dt + 4dx = 0$$

$$(4 - 2t)dx + (3t - 4)dt = 0$$

$$\rightarrow \frac{3t-4}{2(t-2)}dt = dx \quad \rightarrow \quad \int \left(3 + \frac{2}{t-2}\right)dt = \int 2\,dx$$

$$Final\ answer \quad \rightarrow \quad x + 3y + 2Ln|x + y - 2| + c = 0$$

4- ب- اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد یعنی اگر:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

با انتخاب تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

معادله تبدیل به معادله‌ی دیفرانسیلی همگن خواهد شد که طبق دستور العمل 2 به دست می‌آیدh و k نیز

از طریق تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهول قابل دستیابی است یعنی

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_\circ = h \\ y_\circ = k \end{cases}$$ جواب‌های دستگاه

مثال:معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل را حل کنید:

$$(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$$

جواب:معادله‌ی دیفرانسیلی فوق از نوع تفکیک شدنی و یا همگن نیست پس:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 — 1 = 5 \neq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4y + x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = 1 \quad , \qquad y = 0$$

پس تغییر متغیر مناسب عبارتست از:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 0 \end{cases} \rightarrow \quad dx = dx' \quad , \quad dy = dy$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} (x' + 1 - y' - 1)dx' + (4y' + x' + 1 - 1)dy' = 0$$

$$(x' - y')dx' + (4y' + x')dy' = 0 \qquad \left(\text{همگن از درجه } 1\right)$$

$$\rightarrow Z = \frac{y'}{x'} \quad \rightarrow \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{(y' - x')}{4y' + x'} = Z + x'\frac{dZ}{dx'}$$

$$\rightarrow \frac{-4Z^2}{4Z - 1} = x'\frac{dZ}{dx'}$$

$$\rightarrow \int \frac{-4Z^2 - 1}{(4Z + 1)dZ} = \int \frac{x'}{dx'} \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Ln(4Z^2 + 1) + \frac{1}{2}Arc\,tan(2Z) = -Ln\,|x'|$$

$$Final\ answer \quad \rightarrow \frac{1}{2}Ln\,\left|1 + \frac{4y^2}{(x-1)^2}\right| + \frac{1}{2}Arc\,tan\frac{2y}{x-1} = -Ln\,|x - 1| + c$$

5- معادلات دیفرانسیل کامل:

هرگاه دسته منحنی $f(x,y) = c$ داده شده باشد معادله‌ی دیفرانسیلی آن را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$df = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

حال عکس این مطلب در نظر گرفته می‌شود: معادله‌ی$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را درنظر بگیرید. هرگاه تابعی مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

در این صورت می‌توان معادله f را به صورت زیر نوشت:

$$df = 0 \quad or \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

و جواب عمومی آن عبارتست از $f(x,y) = c$ در چنین حالتی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را دیفرانسیل کامل گویند.

نکته: آزمون برای کامل بودن یک معادله‌ی دیفرانسیل عبارتست از:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یعنی اگر

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

باشد آنگاه معادله‌ی دیفرانسیلی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دیفرانسیل کامل است.

نکته: با توجه به روابط فوق حل معادلات دیفرانسیل کامل به طریق زیر می‌باشد:

$$f = \int M\,dx + g(y) \quad , \quad N = \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx + g'(y)$$

$$\rightarrow g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx \rightarrow \; g(y) = \int (N - \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx)\,dy$$

مثال:معادله‌ی دیفرانسیل مقابل را حل کنید:

$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

جواب: شرط کامل بودن معادله‌ی دیفرانسیل(از آزمون کامل بودن) بررسی می‌شود:

$$M(x,y) = e^y \quad , \quad N(x,y) = xe^y + 2y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

$$\rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = e^y$$

پس معادله‌یک دیفرانسیل کامل است.

حال جواب معادله با استفاده از دستورالعمل 5 به دست می‌آید.

$$f(x,y) = \int M dx + g(y) = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \rightarrow xe^y + g'^{(y)} = xe^y + 2y \rightarrow g'^{(y)} = 2y$$

$$\rightarrow g(y) = y^2 \rightarrow f(x,y) = xe^y + y^2 + c_1$$

$$Final\ answer \rightarrow xe^y + y^2 = c$$

مثال:معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$$

$$M(x,y) = y - x^3 \ , \ N(x,y) = x + y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

شرط کامل بودن بر قرار است.

$$f(x,y) = \int M dx + g(y) = \int (y - x^3)dx + g(y) = xy - \frac{x^4}{4} + g(y)$$

جواب:همانند فوق عمل می گردد:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \quad \rightarrow \quad x + g'^{(y)} = x + y^3 \quad \rightarrow \quad g\,(y) = \frac{y^4}{4}$$

$$\rightarrow \quad f(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} \xrightarrow{final\ answer} 4xy - x^4 + y^4 = c$$

نکته: اگر معادله کامل نباشد می‌توان با اضافه کردن یک ضریب معادله را کامل و سپس از دستور العمل 5 حل نمود. این ضریب را عامل انتگرال ساز گویند.

نحوه‌ی به دست آوردن عامل انتگرال ساز:

1- هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = g(x)$ باشد آنگاه عامل انتگرال ساز از رابطه زیر قابل محاسبه است:

عامل انتگرال ساز $\rightarrow \quad \mu = e^{\int g(x)dx}$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$(xy-1)dx + (x^2 - xy)dy = o$$

$$M(x,y) = xy - 1 \quad , \quad N(x,y) = x^2 - xy$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x \;, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - y$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \left(\text{معادله کامل نیست}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x - 2y + y = y - x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{y-x}{x^2 - xy} = -\frac{1}{x} = g(x) \left(\text{تابعی از } x\right)$$

عامل انتگرال ساز $\rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{Lnx^{-1}} = \frac{1}{x}$

حال معادله‌ی دیفرانسیل در عامل انتگرال ساز ضرب می گردد:

$$\frac{1}{x}(xy-1)dx + \frac{1}{x}(x^2-xy)dy = o \quad \rightarrow$$

$$\left(y-\frac{1}{x}\right)dx + (x-y)dy = 0 \quad \rightarrow$$

$$M'(x,y) = y-\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M'}{\partial y} = 1 \quad , \quad N'(x,y) = x-y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial N'}{\partial x} = 1$$

$\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x} = 1$ (حال معادله ها به دیفرانسیل کامل تبدیل شد)

$$f(x,y) = \int M'(x,y)\, dx + g(y) = \int \left(y-\frac{1}{x}\right)dx + g(y) = xy - Ln\, x + g(y)$$

$$\rightarrow N' = \frac{\partial f}{\partial y} = x + g'^{(y)} = x-y \quad \rightarrow \quad g\,(y) = -\frac{y^2}{2}$$

$$f(x,y) = xy - Lnx - \frac{y^2}{2} \quad \rightarrow \quad xy - Lnx - \frac{y^2}{2} = c$$

2- هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M(x,y)} = h(y)$ باشد عامل انتگرال ساز از رابطه زیر قابل محاسبه است:

عامل انتگرال ساز $\rightarrow \quad \mu = e^{\int h(y)dy}$

مثال:معادله‌ی دیفرانسیلی زیر را حل کنید:

$$(3x^2-y^2)dy - 2xydx = 0$$

جواب: ابتدا شرط کامل بودن معادله بررسی می‌شود:

$$M(x,y) = -2xy \quad , \quad N(x,y) = 3x^2 - y^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x \ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \left(\text{معادله کامل نیست}\right)$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M(x,y)} = \frac{-2x - 6y}{2xy} = -\frac{4}{y} = h(y) \left(\text{تابعی از } y\right)$$

$$\text{عامل انتگرال ساز} \quad \rightarrow \quad \mu = e^{\int h(y)dy} = \frac{1}{y^4}$$

حال معادله در عامل انتگرال ساز ضرب می‌شود:

$$\frac{1}{y^4}(3x^2 - y^2)dy + \frac{1}{y^4}(-2xy)dx = 0 \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right)dy - \frac{2x}{y^3}dx = 0 \quad \text{کامل است}$$

$$\rightarrow f(x,y) = \int \mu_{(x,y)}dx + g(y) = \int \frac{-2x}{y^3}dx + g(y) = -\frac{x^2}{y^3} + g(y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\left(-\frac{3}{y^4}\right) + g'^{(y)} = \frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2} \ \rightarrow g(y) = \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow f(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} \xrightarrow{final\ answer} -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} = c$$

3- هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)y - M(x,y)x} = g(x,y)$ تابعی از xy باشد آنگاه می‌توان با تغییر متغیر $z = xy$ عامل انتگرال ساز را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\mu = e^{\int g(z)dz} \quad , \qquad z = xy \ \rightarrow g(xy) = g(z)$$

نکته: عامل انتگرال ساز را می‌توان از عبارت $\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$ که در آن α و β از شرط کامل بودن معادله ($\frac{\partial M\prime}{\partial y} = \frac{\partial N\prime}{\partial x}$) تعیین می گردد به دست آورد.

مثال: مطلوبست به دست آوردن جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیلی زیر:

$$ydx - xdy = (xy^3)dy$$

جواب: ابتدا شرط کامل بودن مورد بررسی قرار می گیرد:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1 - y^3 \quad , \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = 1 \ \rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\left(\text{کامل نیست}\right)$$

راه حل 1:

حال عامل انتگرال ساز محاسبه می گردد:

$$\mu = x^{\alpha}y^{\beta} \quad \rightarrow \ x^{\alpha}y^{\beta}(ydx) + \ x^{\alpha}y^{\beta}(-xdy) = x^{\alpha}y^{\beta}(xy^3)dy$$

$$\rightarrow x^{\alpha}y^{\beta+1}dx + \left(-x^{\alpha+1}y^{\beta} - x^{\alpha+1}y^{\beta+3}\right)dy = 0$$

حال شرط کامل بودن را بررسی کرده تا مقادیر α و β برای ما معلوم گردد.

$$M'^{(x,y)} = \ x^{\alpha}y^{\beta+1} \ , \ \ N'^{(x,y)} = \left(-x^{\alpha+1}y^{\beta} - x^{\alpha+1}y^{\beta+3}\right)dy$$

$$\frac{\partial M'}{\partial y} = (\beta + 1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial N'}{\partial x} = (-1)(1 + \alpha)x^{\alpha}y^{\beta} + (-1)(1 + \alpha x^{\alpha}y^{\beta+3})$$

$$\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x} \quad \rightarrow \ \ 1 + \beta = -(1 + \alpha) \ \rightarrow \ \alpha + \beta = -2$$

$$-(1+\alpha)=0 \;\to\; \alpha=-1 \text{ و } \beta=-1 \;\to\; \mu=x^{-1}y^{-1}=\frac{1}{xy}\left(\text{عامل انتگرال ساز}\right)$$

$$\to\; \frac{1}{x}dx+\left(-\frac{1}{y}-y^2\right)dy=0 \;\to f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

$$=Lnx+g(y)$$

$$\to N=\frac{\partial f}{\partial y}=g'^{(y)}=-\frac{1}{y}-y^2 \;\;\to g(y)=-Lny-\frac{y^3}{3}$$

$$final\ answer\ \to Lnx-Lny-\frac{y^3}{3}=c$$

راه حل 2:

$$\frac{ydx-xdy}{xy}=y^2dy \;\;\to d\left(Ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)=d\left(\frac{y^3}{3}\right)$$

$$\to \int[d(Ln\left(\frac{x}{y}\right))]\int\left[d\left(\frac{y^3}{3}\right)\right] \to Ln\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^3}{3}=c$$

نکته: همان طوری که مشاهده می‌شود راهحل 2 خیلی ساده تر از راه حل اول است. همانند راه حل 2 تکنیک های دیگری که ممکن است برای حل معادلات دیفرانسیل به کار رود عبارتست از:

$$1-d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$2-d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$3-d(xy)=xdy+ydx$$

$$4-d\left(Arc\ tan\ (\frac{x}{y})\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

$$5 - d\left(Ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

مثال: مطلوبست به دست آوردن جواب معادله‌ی زیر:

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0$$

جواب: معادله فوق هر چند به وسیله دستور العمل های قبل قابل حل است اما جهت حل ساده می‌توان با باز نویسی کردن دوباره آن با استفاده از یکی از تکنیک های فوق به جواب رسید

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0 \ \rightarrow x^2ydy - (xdy - ydx) = 0$$

حال با توجه به تکنیک شماره 1:

$$ydy - \left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right) = 0 \ \rightarrow d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$final\ answer\ \rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c$$

6 – معادلات خطی مرتبه اول: در ابتدای این فصل تعریف معادلات خطی آورده شده است. برای اینکه خطی بودن معادله‌ی دیفرانسیل مشخص گردد، در هر یک از این جملات بدین ترتیب حساب می‌شود: توان y و هر یک از مشتقات موجود در آن جمله (ترم) با همدیگر جمع می گردد. هرگاه توان هر ترم از درجه صفر و یا یک باشد معادله را خطی گویند. مثلاً $\frac{d^2y}{dx^2}$ از درجه 1 و جمله‌ی $y\frac{dy}{dx}$ از مرتبه 2 است. چرا که توان y برابر 1 و توان $\frac{dy}{dx}$ نیز 1 می‌باشد و جمعاً 2 می‌شود.

یک معادله دیفرانسل خطی مرتبه اول به صورت کلی زیر است:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

جهت حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

$$\rho = \pm c e^{\int p(x)dx} \quad , \quad \rho y = \int \rho Q(x)\, dx + c$$

نکته: هنگام استفاده از رابطه فوق باید ضریب های $\frac{dy}{dx}$و $Q(x)$ برابر با یک باشد.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل مقابل:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y = x^4$$

جواب:ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل را باز نویسی کرده تا شکل معمول خود را بگیرد:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3y = x^4 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^3 \;\rightarrow p(x) = \frac{-3}{x} \;, Q(x) = x^3$$

$$\rightarrow \rho y = \int x^3 \frac{1}{x^3} dx + c = x + c \,, \rho = e^{\int \frac{-3}{x}dx} = e^{-3Lnx} = \frac{1}{x^3}$$

$$final\ answer \;\rightarrow\; \frac{1}{x^3} y = x + c \quad , \qquad y = x^4 + cx^3$$

7- معادله برنولی:معادله‌ی دیفرانسیلی به فرم $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ را که در آن $n \neq 0{,}1$ است، معادله برنولی نامیده می‌شود.

جهت به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیلی به فرم معادله برنولی می‌توان طرفین تساوی فوق را بر y^nتقسیم کرده و از تغییر متغیر زیر استفاده کرد:

$$\rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad , \quad z = y^{1-n}\ \text{تغییر متغیر}$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} \frac{1}{n-1}\cdot\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

حال معادله تبدیل به معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه اول شده و جواب عمومی آن طبق دستور العمل 6 به دست می‌آید.

فقط در انتهای محاسبات $z = y^{1-n}$ جایگزین می‌شود.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی مقابل:

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

جواب: اگر معادله دوباره نویسی شود، مشخص می‌شود که به فرم معادله برنولی است. پس:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}} \;\rightarrow\; y^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{x}y^{\frac{2}{3}} = x^4$$

تغییر متغیر:

$$z = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} \;\rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}$$

جایگذاری در معادله اصلی:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4 \text{ خطی مرتبه اول}$$

$$\rightarrow \rho = e^{\int \frac{-2}{3}dx} = e^{-2Lnx} = \frac{1}{x^2} \quad , \qquad \rho z = \int \left(\frac{2}{3}x^4 dx.\frac{1}{x^2}\right) + c = \frac{2}{9}x^3 + c$$

$$z = \frac{2}{9}x^5 + cx^2 \;\rightarrow final\ answer \;\rightarrow\; y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}x^3 + c$$

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیلی زیر:

$xy' + y = x^4 y^3$

جواب: همان طوری که مشاهده می‌شود معادله فوق در فرم معادله برنولی است پس:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = x^3 y^4 \ , \qquad y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-2} = x^3$$

تغییر متغیر:

$$z = y^{-2} \ \rightarrow \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \ \rightarrow \frac{dz}{-2dx} = \frac{1}{x}z = x^3$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{-2}{x}z = -2x^3 \ \rightarrow \rho = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2Lnx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\rho z = \int \frac{-2}{x^2}x^3 dx = -x^2 + c_1 \ \rightarrow z = \frac{-x^2}{-2x^3} + c_1 = \frac{1}{x} + c_1$$

$$final\ answer \ \rightarrow \ y^2 = x + c$$

مثال: مطلوبست به دست آوردن مسیرهای متعامد دسته منحنی $y = x + ce^{-x}$

جواب:

$$y' = 1 - ce^{-x} \ \rightarrow c = \frac{y-x}{e^{-x}} \ \rightarrow y' = 1 - \left(\frac{y-x}{e^{-x}}\right)e^{-x} = 1 - (y - x)$$

$\frac{dy}{dx} = -y + x + 1$ معادله دیفرانسیلی دسته منحنی ها

معادله مسیرهای متعامد:

$$-\frac{dy}{dx} = -y + x + 1 \ \rightarrow \frac{dy}{dx} + x = y - 1$$

معادله خطی مرتبه اول x نسبت به y

$$\rightarrow \rho = e^{\int dy} = e^{y} \quad \rho x = \int e^{y}(y-1)\,dy = (y-2)e^{y}$$

$$x = \frac{(y-2)e^{y}}{e^{y}} \rightarrow x = y - 2 + c_1 \quad , \quad y = x + 2 + c$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم:

یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم رابطه‌ای بین y و y' و y'' و $f(x)$ می‌باشد. به عبارت دیگر یک معادله‌ی دیفرانسیلمرتبه‌ی دوم به شکل زیر قابل مشاهده است:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

حل معادلات مرتبه‌ی دوم:

1- معادلات مرتبه‌ی دومی که به معادلات مرتبه‌ی اول قابل تبدیل است:

بعضی از انواع این معادلات با تغییر متغیر های مناسب به معادلات مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود. دو نوع از این معادلات در ادامه مورد بررسی واقعمی‌شود:

1-1- معادلات دیفرانسیلی که در آنها متغیر y ظاهر نشده است. پس به صورت مقابل هستند:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

برای به دست آوردن جواب این نوع معادلات کافیست تغییر متغیر $\frac{dy}{dx} = p$ را در نظر گرفته و به شکل زیر عمل کرد:

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

با این تغییر متغیر معادله به صورت

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

تبدیل می‌شود که این معادله‌یمرتبه‌ی اول نسبت به pوx است و با استفاده از دستورالعمل های مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول می‌توان جواب را به دست آورد. سپس با استفاده از رابطه‌ی زیر جواب عمومی نهایی به دست خواهد آمد:

$$y = \int p(x)dx + c$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم مقابل:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

جواب: با توجه به اینکه y در معادله بالا ظاهر نشده است می‌توان مطابق دستور العمل 1-1 عمل کرد پس:

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx} + p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -dx \quad \rightarrow Ln|p| = -x + c_1' \quad \rightarrow p = \pm c_1 e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \rightarrow dy = pdx = \pm c_1 e^{-x} dx$$

$$final\ answer \ \rightarrow y = \pm c_1 e^{-x} dx + c_2$$

همان طوری که مشاهده می‌شود جواب نهایی معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم مقدار ثابت دارد.

2-1- معادلات مرتبه‌ی دومی که در آنها x ها ظاهر نشده است. این معادلات به صورت کلی مقابل هستند:

$$f\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

در این حالت با تغییر متغیر $\frac{dy}{dx}=p$ می‌توان معادله را به معادله مرتبه‌ی اول تبدیل کرد پس:

تغییر متغیر:

$$\frac{dy}{dx}=p \;\; \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم مقابل:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

جواب: همانطور که مشاهده می‌شود درصورت معادله فوق x ظاهر نشده است,پس می‌توان از دستورالعمل 2-1 معادلات مرتبه‌ی دوم استفاده کرد:

تغییر متغیر:

$$\frac{dy}{dx}=p \;\; \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy}+y=0 \;\; \rightarrow \int pdp=\int -ydy \rightarrow \frac{p^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+c$$

$$\rightarrow y^2={c_1}^2-p^2 \;\rightarrow y=\pm\sqrt{{c_1}^2+p^2} \quad , \quad p=\pm\sqrt{{c_1}^2+y^2}$$

$$dy=pdx=\pm\sqrt{{c_1}^2+y^2}\,dx \;\; \rightarrow \int\frac{dy}{\pm\sqrt{{c_1}^2+y^2}}=\int dx$$

$$\pm Arc\,sin(\frac{y}{c_1}) = x + c_2 \xrightarrow{final\ answer} y = \pm c_1\,sin(x + c_2)$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم مقابل:

$$y" - k^2 y = 0$$

جواب: مطابق دستورالعمل 1-2 حل معادلات مرتبه‌ی دوم دیفرانسیل می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = p \ \ \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy} \ \ \ \rightarrow p\frac{dp}{dy} - k^2 y = 0$$

$$\rightarrow pdp = k^2 ydy \ \rightarrow p^2 + c = k^2 y^2$$

$$p = \pm\sqrt{{c_1}^2 + k^2y^2} \quad , \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{{c_1}^2 + k^2y^2}$$

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{{c_1}^2 + k^2y^2}} = dx \ \ \rightarrow \int \frac{dy}{\pm k\sqrt{\left(\frac{c_1}{k}\right)^2 + y^2}} = \int dx$$

$$final\ answer \ \rightarrow \frac{1}{\pm k}\ Ln\left|y + \sqrt{\left(\frac{c_1}{k}\right)^2 + y^2}\right| = x + c_2$$

یاد آوری:صورت کلی معادله‌ی دیفرانسیلمرتبه‌ی دوم به شکل زیر می‌باشد:

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad *$$

هرگاه $R(x) = 0$ باشد آنگاه معادله تبدیل به معادله مرتبه‌ی دوم همگن می‌شود یعنی:

$$if \ \ R(x) = 0 \ \ \rightarrow \ y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \ \ **$$

اگر $R(x) \neq 0$ بود آنگاه معادله‌ی غیرهمگنخواهد بود.

نکته: هرگاه y_hجواب عمومی برای معادله‌ی همگن فوق ** و y_p جواب خصوصی برای معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم غیرهمگن* باشد. آنگاه جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیرهمگن* از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$y_g = y_h + y_p$$

که در آن:

$y_h =$ جواب همگن

$y_p =$ جواب خصوصی

نکته:تابع$y = 0$ یک جواب برای معادلات دیفرانسیلی همگن می‌باشد. که آن را جواب صفر گویند ولی جواب مورد نظر نیست.

قضیه: هرگاه $y_1(x)$و$y_2(x)$ جواب های مستقل خطی معادله‌ی همگن** باشند آنگاه هر ترکیب خطی آنها نیز یعنی$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$جواب عمومی معادله‌ی همگن **می‌باشد.

تعریف: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را که در فاصله‌ی $[a, b]$ تعریف شده‌اند وابسته خطی گویند هرگاه یکی از آنها مضرب ثابتی از دیگری باشد. در غیر این صورت آنها را مستقل خطی می‌گویند.

تعریف:عبارت $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \omega(y_1, y_2)$ را رونسکی دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از معادله‌ی دیفرانسیل گویند.

نکته:اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های معادله‌ی همگن ** باشندآنگاه اگر $\omega(y_1, y_2) = 0$، y_1وy_2وابسته خطی هستند و اگر $\omega(y_1, y_2) \neq 0$باشد y_1 و y_2 مستقل خطی می‌باشند.

مثال: نشان دهید که $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ جواب عمومی معادله‌ی همگن$y'' + y = 0$در هر فاصله است و جواب خصوصی را چنان بیابید که شرایط $y(0) = 2$ و$y'(0) = 3$ در آن صدق کند.

جواب:

روش 1:با توجه به مطالب عنوان شده:

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

$$y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$$

$$\rightarrow\ y'' + y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - c_1 \sin x - c_2 \cos x = 0$$

روش 2:

اگر $y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$جواب همگن معادله‌ی$y'' + y = 0$ باشد، پس طبق مطالب قبل می‌توان گفت:

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{cases} \rightarrow \omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

$$if \quad y_1 = \sin x \ \rightarrow y_1' = \cos x \quad , \quad y_1'' = -\sin x \quad \rightarrow y_1'' + y_1' = 0$$

$$if \quad y_2 = \cos x \ \rightarrow y_2' = -\sin x \quad , \quad y_2'' = -\cos x \quad \rightarrow y_2'' + y_2' = 0$$

پس هر ترکیب خطی y_1 و y_2 برای ما جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل همگن مزبور خواهد بود یعنی:

$y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ جواب عمومی معادله همگن

برای به دست آوردن جواب خصوصی کافی است از اعمال شرایط مرزی بهره گرفته شود:

$$y(0) = 2 \quad \rightarrow \ c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 2 \quad \rightarrow \ c_2 = 2$$

$$y'(0) = 3 \ \rightarrow \ c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 3 \quad \rightarrow \ c_1 = 3$$

$y_p = 3 \sin x + 2 \cos x$ جواب خصوصی معادله

نحوه‌ی یافتن یک جواب معادله‌ی همگن از روی جواب دیگر:

همان طوری که قبلاً اشاره گردید اگر دو جواب مستقل خطی مانند y_1 و y_2 برای معادله‌ی همگن معمولی باشد می‌توان جواب عمومی آن را نیز به دست آورد. اما هیچ روش کلی برای پیدا کردن y_1 و y_2 وجود ندارد. ولی اگر یک جواب y_1 معلوم باشد می‌توان y_2 را از روی آن و در نهایت جواب عمومی آن را به دست آورد فرض کنید y_1 یک جواب معادله‌ی همگن** باشد. آنگاه جواب دوم آن یعنی y_2 از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ همگن

$if \ y_1 =$ یک جواب همگن باشد $\rightarrow y_2 = v.y_1$

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx$$

مثال: معادله‌ی $x^2y'' + xy' - y = 0$ در نظر بگیرید.بافرض اینکه $y_1 = x$ یکی از جواب‌های معادله‌ی فوق باشد، جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad\qquad v = \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx$$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-Lnx} = \frac{1}{x}$$

$$v = \int \frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}dx = \frac{1}{-2x^2} \quad \rightarrow y_2 = v \ y_1 = \frac{1}{-2x^2} \times x = \frac{-1}{2x}$$

در نهایت جواب عمومی معادله‌ی همگن به شکل زیر می‌باشد:

$$final\ answer \ \rightarrow \ y_h = c_1 x + c_2 (\frac{-1}{2x})$$

حل معادله‌ی دیفرانسیلی همگن مرتبه‌ی دوم با ضرایب ثابت:

صورت کلی معادله‌ی دیفرانسیلی همگن مرتبه‌ی دوم با ضرایب ثابت به شکل زیر می‌باشد:

$y'' + py' + qy = 0$ (p و q ضرایب ثابت‌اند)

$y = e^{mx}$ با عدد ثابت مناسب m به عنوان جواب معادله‌ی فوق می‌باشد. جهت به دست آوردن مقدار مناسب m معادله‌ی زیر را تشکیل می‌شود که معادله‌ی کمکی یا مفسر معادله‌ی دیفرانسیل مزبور گویند.

$if \ \ y'' + py' + qy = 0 \ \ \rightarrow \ \ m^2 + pm + q = 0$ معادله مفسر یا کمکی

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

با توجه به معادله حالت های زیر قابل پیش بینی است:

1- حالت اول: معادله‌ی کمکی دو ریشه‌یحقیقی متمایز دارد مانند m_2 و m_1. در این حالت $y_1 = e^{m_1 x}$ و $y_2 = e^{m_2 x}$ به دست خواهد آمد. با توجه به اینکهنسبت $\frac{y_1}{y_2} = e^{(m_1 - m_2)x}$ یک عدد ثابت نیست بنابراین جواب های مستقل خطی هستند. در نتیجه جواب عمومی آن به شکل زیر می‌باشد:

$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$y'' + y' - 6y = 0$

جواب: با توجه به مطالب فوق معادله‌ی مفسر را می‌توان به طریق زیر تشکیل داد:

$m^2 + m - 6 = 0 \quad \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-6) = 25$

$m_1 = -3 \quad m_2 = 2$

$final\ answer \quad \rightarrow y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$

2- حالت دوم: اگر عبارت زیر رادیکال کوچکتر از صفر باشد طوری که دو ریشه مختلط و متمایز داشته باشد.می‌توان این دو جوابرا به صورت $a \pm ib$ نوشت. بنابراین برای به دست آوردن جواب عمومی:

$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}.e^{ibx} = (cosbx + isinbx)e^{ax} \quad *$

$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}.e^{-ibx} = (cosbx - isinbx)e^{ax} \quad **$

از آنجاییکه جواب های حقیقی مورد نظر هستند بنابراین * و** یک بار جمع کرده و بر 2 تقسیم و بار دیگر از هم کم کرده و بر $2i$ تقسیم می‌شود تا جواب های زیر حاصل شود در نهایت جواب عمومی معادله به قرار زیر است:

$$y_1 = \frac{e^{m_1 x} + e^{m_2 x}}{2} = c_1 e^{ax} \cos bx$$

$$y_2 = \frac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{2i} = c_2 e^{ax} \sin bx$$

$$\rightarrow \quad y_h = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$$

مثال: مطلوبست جواب های معادله‌ی زیر:

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

جواب: با توجه به مطالب فوق:

$$m^2 + 2m + 10 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{1 - 10}}{1} = -1 \pm 3i$$

$$final\ answer \ \rightarrow \ y_h = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

3- حالت سوم:

اگر m جواب مضاعف داشته باشد فقط یک جواب وجود دارد که عبارتست از:

$$y_1 = e^{mx} = e^{\frac{-p}{2}x} \text{ چرا که } \rightarrow m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p}{2}$$

حال جواب دوم یعنی y_2 نیز از روی جواب اولی y_1قابل حصول است:

$$y_1 = e^{\frac{-p}{2}x} \quad , v = \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{e^{\frac{-p}{2}x^2}} . e^{-px} . dx$$

$$v = \int dx = x + c \ \rightarrow \ y_2 = xe^{mx}$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی مقابل:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

جواب:

$\rightarrow m^2 + 2m + 10 = 0 \;\; \rightarrow \;\; (m+2)^2 = 0 \;\; \rightarrow m = -2$ ریشه مضاعف

$y_1 = e^{-2x} \quad , \qquad y_2 = xe^{-2x} \xrightarrow{final\ answer} y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x}$

حل معادله‌ی غیرهمگن با ضرایب ثابت: صورت کلی معادله‌ی غیرهمگن با ضرایب ثابت به شکل زیر می‌باشد:

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

هرگاه y_p یک جواب خصوصی برای این معادله باشد و y_h جواب عمومی معادله‌ی همگن فوق باشد (y_h جوابعمومی $y'' + py' + qy = 0$) آنگاه جواب عمومی معادله فوق عبارت خواهد بود از:

$$y_g = y_h + y_p$$

جواب عمومی معادله‌ی فوق از راه حل‌های قبلی (با توجه به ثابت بودن ضرایب ثابت آن,qp) قابل حصول است. جواب خصوصی آن هم از روش ضرایب نامعین به دست می‌آید.

نحوه‌ی به دست آوردن جواب خصوصی y_pمعادله‌ی دیفرانسیلمرتبه‌ی دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت به روش نا معین:

الف- هرگاه $R(x) = e^{ax}$ باشد یعنی معادله بصورت $y'' + py' + qy = e^{ax}$ باشد:

1- اگر a ریشهساده معادله کمکی آن یعنی $m^2 + pm + q = 0$ نباشد جواب خصوصی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$if: y'' + py' + qy = R(x) = e^{ax} \quad ,$ a ریشه ساده معادله کمکی نباشد

آنگاه:

$y_p = Ae^{ax}$

2- اگر a ریشه ساده معادله کمکی $m^2 + pm + q = 0$ باشد در این صورت جواب خصوصی به صورت مقابل خواهد بود:

$y_p = Axe^{ax}$

3- اگر a ریشه مضاعف معادله کمکی $m^2 + pm + q = 0$ باشد آنگاه جواب خصوصی به صورت مقابل خواهد بود:

$y_p = Ax^2e^{ax}$

نکته: در تمام موارد فوق ضریب A هم بعد از جایگذاری جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل تعیین خواهد شد.

مثال: مطلوبست حل معادله $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$ و جواب خصوصی و عمومی آن.

جواب: ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن به دست آورده می‌شود:

$y'' - y' - 6y = 0$ ← معادله همگن معادله‌ی مزبور

$m^2 - m - 6 = 0 \quad m = 3, -2$

معادله جواب عمومی همگن:

$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

برای به دست آوردن جواب خصوصی y_pهم با توجه به اینکه $R(x) = e^{-2x}$ و $a = -2$ یکی از ریشه های ساده و متمایز معادله کمکی معادله‌ی دیفرانسیل فوق می‌باشد لذا:

$y_p = Axe^{ax} \quad \rightarrow \; y_p' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$ ← جهت به دست آوردن ضریب ثابت

$y_p'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}$

$\rightarrow \; -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} - Ae^{-2x} + 2Axe^{-2x} - 6Axe^{-2x} = 20e^{-2x}$

$\rightarrow \; -5Ae^{-2x} = 20e^{-2x} \rightarrow \quad A = -4 \;\; \rightarrow y_p = -4xe^{-2x}$

$final\ answer \; \rightarrow \;\; y_g = y_h + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$$

$$y_1 = e^x \quad \rightarrow y_2 = vy_1 \quad , v = \int \frac{1}{y_1^2} . e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} . e^{\int p(x)dx} . dx =$$

$$y_2 = vy_1 \xrightarrow{final\ answer} y = c_1e^x + c_2e^x . \int \frac{1}{e^{2x}} . e^{\int p(x)dx} . dx$$

نکته: اگر مجموع ضرایب (ضرایب y و y' و y'') در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم صفر شود یکی از جواب ها $y_1 = e^x$ است و y_2 هم از روی y_1 قابل حصول می‌باشد.

معادله‌ی اویلر:معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل زیر را معادله‌ی اویلر گویند:

$$x^2y'' + px . y' + qy = 0 \qquad \left(p \text{ و } q\text{: ضرایب عدد ثابت}\right)$$

برای حل معادله‌ی اویلر کافیست که تغییر متغیر $x = e^z$ در نظر گرفته شود. در این صورت معادله تبدیل به معادله‌ای با ضرایب ثابت می گردد که روش حل آن قبلاً عنوان شده است.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$$x^2y'' + 3x . y' + 10y = 0$$

جواب: همان طوری که از صورت معادله مشخص است. معادله فوق یک معادله‌ی اویلر است پس طبق مطالب فوق:

$$x^2y'' + 3x.y' + 10y = 0 \ \rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 10 \end{cases} \rightarrow \text{تغییر متغیر مناسب} \rightarrow \ x = e^z$$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{dy}{dz}\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$y'' = \frac{d(\frac{dy}{dz})}{xdz} \times \frac{1}{x} + \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \rightarrow$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

حال اگر در معادله اصلی جایگذاری شود:

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)\right] + 3x\left[\frac{dy}{dz}\right]\left(\frac{1}{x}\right) + 10y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 3\frac{dy}{dz} + 10y = y_z'' + 2y_z' + 10y = 0$$

معادله‌ی همگن با ضرایب ثابت

$$p' = 2 \ , \qquad q' = 10$$

چنانچه معادله‌ی مفسر معادله جدید تشکیل داده شود:

$$\rightarrow m^2 + 2m + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(10)(1) = 4 - 40 = -36 = 36i^2$$

$$m_1, m_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 + 3i \quad , -1 - 3i$$

$$y_1 = e^{-x}(\cos 3x + i \sin 3x) \, , y_2 = e^{-x}(\cos 3x - i \sin 3x)$$

$$final\ answer \ \rightarrow \ y_h = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

نکته: همان طوری که در مثال قبلی دیدید معادله‌ی اویلر بعد از اختیار تغییر متغیر $x = e^z$ تبدیل به معادله‌ی همگن با ضرایب ثابت به شکل زیر می گردد:

$$x^2y'' + py' + qy = 0 \xrightarrow{x=e^z} y_z'' + p'y_z' + q'\,y = 0$$

$$p' = p - 1 \quad , q' = q$$

$$y'' + (p-1)y' + qy = 0$$

ب-1- حال اگر $R(x) = \sin bx$ یعنی $y'' + (p)y' + qy = \sin bx$ آنگاه:

$$y_p = Asinbx + Bcosbx$$

که ضرایب A و B از جایگذاری y_p در معادله اصلی به‌دست می‌آید.

2- و اگر $R(x) = \cos bx$ یعنی $y'' + (p)y' + qy = \cos bx$ آنگاه:

$$y_p = Asinbx + Bcosbx$$

که در اینجا نیز A و B از جایگذاری y_p در معادله اصلی به دست می‌آید.

3- و باز اگر $R(x) = \alpha \sin bx + \beta cosbx$ باشد. آنگاه مطابق حالت‌های ب -1 و ب-2 جواب عبارت خواهد بود از:

$y_p = Asinbx + Bcosbx$

با جایگذاری معادله y_p در معادله اصلی، همانند حالت های بالا، مقادیر A و B قابل حصول خواهد بود.

نکته: در حالت ب-3 هرگاه بعد از جایگذاری y_p در معادله اصلی متوجه شدیم که y_pضریب ثابتی از $R(x)$ است یعنی $y_p = cR(x)$ (عدد ثابتc) آنگاه جواب خصوصی نهایی از عبارت مقابل به دست خواهد آمد:

$y_p = x(Asinbx + Bcosbx)$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیل مقابل:

$y'' + 4y = 3\,sin\,x$

جواب:

ابتدا y_p: همان طوری که مشاهده می کنید حالت ب-1 در اینجا صادق است پس:

$y_p = Asinx$

برای به دست آوردن مقدارA، y_p در معادله اصلی جایگذاری می‌شود:

$y_p = Asinx \;\rightarrow\; y_p' = Acosx \quad , \qquad y_p'' = -A\,sin\,x$

$\rightarrow\; -Asin\,x + 4Asin\,x = 3\,sin\,x \;\rightarrow\; -A + 4A = 3 \;\rightarrow A = 1$

$y_p = sinx$

حال جواب عمومی همگن معادله فوق به دست می‌آید:

$y'' + 4y = 0$

$m^4 + 4 = 0 \;\; m = \pm 2i$

$y_h = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$final\ answer \ \rightarrow \ y_g = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x)$

پ- اکنون حالتی را در نظر بگیرید که طرف راست معادله‌یعنی$R(x)$ یک کثیر الجمله باشد به عبارت دیگر معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + py' + qp = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

در این صورت جواب خصوصی از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$$

که A_0و A_1 و A_2 و......A_n ضرایب مجهول هستند که از جایگذاری y_p در معادله اصلی قابل حصول است.

نکته: هرگاه مقدار ثابت q برابر صفر باشد $(q = 0)$ یعنی در معادله‌ی فوق y ظاهر نشود. بعد از جایگذاری y_p در معادله‌ی اصلی، در سمت چپ معادله، x^{n-1} جمله‌ای با بزرگترین توان x خواهد بود (به خاطر عدم وجود y).

بنابراین در این حالت جواب خصوصی به صورت $y_p = x(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n)$ در نظر گرفته می‌شود و اگر q و pهر دو صفر باشند $(p, q = 0)$ جواب خصوصی (y_p) با انتگرالگیری مستقیم بدست می‌آید.

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی مقابل:

$$y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$$

جواب: ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن فوق به دست آورده می‌شود:

$y'' - 2y' + 5y = 0$ معادله همگن

معادله مفسر $\rightarrow m^2 - 2m + 5 = 0 \rightarrow m = 1 \pm 2i$

$\rightarrow y_h = e^x(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

حال جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$y_p = Ax^2 + Bx + c \rightarrow y' = 2Ax + B \quad , \quad y'' = 2A$

$2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5c = 25x^2 + 12$

$A = 5 \; , \qquad B = 4 \quad , C = 2 \rightarrow$

$y_p = 5x^2 + 4x + 2$

$final\ answer \rightarrow y_g = e^x(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) + 5x^2 + 4x + 2$

نکته: هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ترتیب جواب‌های خصوصی معادلات $y'' + py' + qp = R_1(x)$ و $y'' + py' + qp = R_2(x)$ باشد و y_h جواب عمومی معادله‌ی همگن آنها باشدآنگاه $y_p = y_1(x) + y_2(x)$ جواب خصوصی $y'' + py' + qp = R_1(x) + R_2(x)$ خواهد بود.

مثال: مطلوبست جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیلی مقابل:

$y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x - 4x$

جواب: مطابق مطالب فوق جواب همگن y_h و $y'' + 4y = 0$ مطابق روش‌های قبلی قابل حصول استو از طرفی اگر $y_1(x)$ جواب خصوصی $y'' + 4y = 4\cos 2x$ و $y_2(x)$ جواب خصوصی $y'' + 4y = +6\cos x$ و $y_3(x)$ جواب خصوصی $y'' + 4y = -4x$ در این صورت جواب نهایی عبارت خواهد بود از:

$$y_g = y_h + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$$

روش به دست آوردن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم از روی جواب عمومی همگن آن با استفاده از روش تغییر پارامترها:

معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم را به شکل مقابل در نظر بگیرید:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

فرض کنید $y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ جواب عمومی معادله‌ی همگن معادله دیفرانسیل فوق $(y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0)$ باشد آنگاه جواب خصوصی y_p معادله‌ی فوق از روابط زیر قابل حصول است:

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$v_1 = \int \frac{-y_2(x).R(x)}{\omega(y_1, y_2)}dx \quad , \quad v_2 = \int \frac{y_1(x).R(x)}{\omega(y_1, y_2)}dx$$

y_1, y_2 رونسکی $\omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی زیر:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin 2x - 18\cos 2x$$

جواب:

روش 1: ابتدا جواب عمومی معادله‌ی همگن

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m = 1,2$$

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad \rightarrow \quad y_1 = e^x \quad , y_2 = e^{2x}$$

حال برای به دست آوردن y_p مطابق روش تغییر پارامتری:

$$\omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

$$v_1 = \int \frac{-y_2(x).R(x)}{\omega(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-e^{2x}}{e^{3x}} (\sin 2x - 18 \cos 2x) dx$$

$$v_2 = \int \frac{y_1(x).R(x)}{\omega(y_1, y_2)} dx = \int \frac{e^x}{e^{3x}} (\sin 2x - 18 \cos 2x) dx$$

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$final\ answer \rightarrow y_g = y_p + y_h$$

روش 2: با استفاده از ضرایب نامعین هم می‌توان y_p را به دست آورد:

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 1{,}2 \rightarrow y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x \rightarrow \begin{cases} y' = 2A\cos\ 2x - 2B\sin 2x \\ y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x \end{cases}$$

$$\rightarrow -4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 6A\cos 2x + 6B\sin 2x + 2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$= \sin 2x - 18 \cos 2x$$

$$\rightarrow A = \frac{3}{2} \quad , \quad B = \frac{5}{3}$$

$$y_p = \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{5}{3}\cos 2x$$

$$final\ answer \rightarrow y_g = y_p + y_h = \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{5}{3}\cos 2x + c_1e^x + c_2e^{2x}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل: در این مبحث به خاطر سادگی، دستگاه‌های متشکل از دو معادله‌یمرتبه‌ی اول بر حسب دو تابع مجهول بررسی می‌شود:

حالت کلی دستگاه متشکل از دو معادله مرتبه‌ی اول به شکل مقابل می‌باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y,t) \end{cases}$$

حالت های خاص این دستگاه ها یعنی دستگاه های خطی مرتبه‌ی اول هم به شکل زیر می‌باشد:

دستگاه خطی:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases}$$

که در آن $a_{1,2}(t)$ و $b_{1,2}(t)$ و $f_{1,2}(t)$در فاصله‌ی$[a,b]$پیوسته هستند.

نکته: اگر $f_1(t) = 0$ و $f_2(t) = 0$ باشد. دستگاه خطی فوق را همگن گویند. در غیر این صورت ناهمگن است یعنی:

$$if \quad \begin{cases} f_1(t) = 0 \\ f_2(t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{cases}$$ دستگاه همگن

قضیه: هرگاه دستگاه همگن فوق در فاصله‌ی $[a,b]$دارای دوجواب $\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$ و $\begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$باشد

به طوریکه این دو جواب در فاصله‌ی مذکور از همدیگر مستقل خطی باشد به طوری که یکی مضرب

دیگری نباشد و رونسکی جواب های فوق مخالف صفر باشد($\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$) آنگاه دستگاه

دارای جواب عمومی به شکل مقابل خواهد بود:

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t)x + c_2y_2(t) \end{cases}$$

یعنی هر ترکیب خطی از جواب های دستگاه همگن، برای ما جواب عمومی خواهد بود. به طوریکه c_1 و c_2 ثابت های دلخواه هستند.

نحوه‌ی پیدا کردن جواب عمومی دستگاه در معادله عمومی خطی همگن با ضرایب ثابت:

دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases}$$

a_1و a_2 و b_1 و b_2 اعداد ثابت هستند.

جواب دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

جهت به دست آوردنm مناسب معادله‌ی کمکی زیر را تشکیل داده و با توجه به حالات زیر m مناسب را استخراج می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow (a_1 - m)(b_2 - m) - b_1a_2 = 0$$

1- حالت اول: اگر معادله کمکی ریشه های حقیقی متمایزm_1 وm_2 داشته باشند در این حالت به سادگی می‌توان جواب ها را به شکل زیر تعیین کرد:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{m_1 t} \\ y_1 = B_1 e^{m_1 t} \end{cases} , \quad \begin{cases} x_2 = A_2 e^{m_2 t} \\ y_2 = B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_h = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y_h = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases}$$

A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2هم از جایگذاری جواب در معادله اصلی قابل حصول است.

مثال: دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$$

جواب: مطابق مطالب فوق ابتدا معادله کمکی دستگاه فوق تشکیل می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ 4 & -2-m \end{vmatrix} = (1-m)(-2-m) - 4 = 0 \quad m_1 = -3 \; , m_2 = 2$$

$$\rightarrow if \; m = -3 \;\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1e^{-3t} \\ y_1 = -4e^{-3t} \end{cases}$$

$$if \; m = 2 \;\rightarrow \begin{cases} x_2 = 1e^{2t} \\ y_2 = 1e^{2t} \end{cases}$$

$$final \; answer \;\rightarrow \begin{cases} x_h = c_1 e^{-3t} + e^{2t} \\ y_h = -4c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

2- حالت دوم: اگر معادله کمکی ریشه مضاعف داشته باشد در این صورت معادله دارای یک جواب به صورت

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{mt} \\ y_2 = Be^{mt} \end{cases}$$

است و جواب دیگر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} x_2 = (A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y_2 = (B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases}$$

با جایگذاری جواب ها در معادله اصلی ثابت ها قابل حصول هستندو در نهایت جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_h = c_1 A e^{mt} + c_2(A_1 + A_2 t)e^{mt} \\ y_h = c_1 B e^{mt} + c_2(B_1 + B_2 t)e^{mt} \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

جواب: مطابق مطالب فوق ابتدا معادله کمکی تشکیل داده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 3-m & -4 \\ 1 & -1-m \end{vmatrix} = (3-m)(-1-m) + 4 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \ \rightarrow m = 1 (\text{ریشه مضاعف})$$

$$m = 1 \ \rightarrow \ \begin{cases} x_1 = Ae^t \\ y_1 = Be^t \end{cases} \ A = 2 \ , \qquad B = 1 \ \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2e^t \\ y_1 = e^t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_2 = (A_1 + A_2 t)e^t \\ y_2 = (B_1 + B_2 t)e^t \end{cases} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله اصلی}} A_1 = 1 \ , A_2 = 2, B_1 = 0, B_2 = 1$$

$$\begin{cases} x_2 = (1 + 2t)e^t \\ y_2 = (0 + t)e^t \end{cases} \rightarrow \ \ final\ answer \ \rightarrow \begin{cases} x_h = 2c_1 e^t + c_2(1 + 2t)e^t \\ y_h = c_1 e^t + c_2 t\, e^t \end{cases}$$

3- حالت سوم: معادله کمکی ریشه مختلط و متمایز دارد در این ریشه اینها را می‌توان به حالت $m_1 = a + ib$ و $m_2 = a - ib$ در نظر گرفت. در این صورت جواب های مختلط دستگاه به شکل زیر خواهند بود:

$$m_1 = a + ib \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = (A_1 + iA_2)e^{a+ib} \\ y_1 = (B_1 + iB_2)e^{a+ib} \end{cases}$$

$$m_2 = a - ib \;\rightarrow\; \begin{cases} x_2 = (A_3 + iA_4)e^{a-ib} \\ y_2 = (B_3 + iB_4)e^{a-ib} \end{cases}$$

جواب های حقیقی هم عبارت خواهند بود از:

$$\begin{cases} x_1 = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y_1 = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt) \\ y_2 = e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt) \end{cases}$$

و جواب عمومی حقیقی هم به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_h = e^{at}[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt) \\ y_h = e^{at}[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt) \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$$

جواب: ابتدا مطابق مثال های قبل معادله کمکی تشکیل می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 4 - m & -2 \\ 5 & 2 - m \end{vmatrix} = (4 - m)(2 - m) + 10 = 0 \;\rightarrow\; m = 3 \pm 3i$$

$$\rightarrow \begin{cases} (4-m)A - 2B = 0 \\ 5A + (2-m) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 - 3i \end{cases}$$

$$x = 2e^{(3+3i)t} = 2e^{3t}[\cos 3t + i \sin 3t]$$

$$y = (1-3i)e^{(3+3i)t} = e^{3t}(1-3i)(\cos 3t + i \sin 3t)$$
$$= e^{3t}[(\cos 3t + 3\sin 3t) + i(\sin 3t - 3\cos 3t)]$$

تبدیل لاپلاس:

هرگاه عمل مشتق گیری را در نظر بگیریم عمل مشتق گیری تابع $f(x)$ را به تابع دیگری تبدیل می کند که همان $f'(x)$ خواهد بود. اگر عمل مشتق گیری را با D نشان داده شود:

$$D(f(x)) = f'(x)$$

تبدیل مهم دیگر، انتگرال گیری است. روی بازه ای که $[a, b]$ تعریف شده اند تبدیل انتگرال بدین صورت می‌باشد:

$$I[f(x)] = \int_a^b f(x)dx$$

نکته:تبدیل T را از توابع خطی گویند هرگاه به ازای تمام اعداد ثابت α و β :

$$T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha T(f(x)) + \beta T(g(x))$$

به عنوان مثال عمل تبدیل مشتق توابع و انتگرال گیری جزء تبدیل های خطی محسوب می شوند.

عمل تبدیل لاپلاس هم تبدیلی است که روی توابع به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = F(p)$$

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع ثابت$f(x) = 1$ ؟

جواب: همان طوری که در بالا اشاره گردید عمل تبدیل لاپلاس توابع به شکل زیر روی توابع انجام می‌گیرد:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-px} \times 1dx = \int_0^\infty e^{-px}dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right) - \left(-\frac{1}{p}\right)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$$

نکته: بعضی از تبدیل های مهم لاپلاس به شکل زیر می‌باشند:

$$1 \quad - f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{P} \quad or \quad F(P) = \frac{1}{P}$$

$$2 - f(x) = x \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[x] = \frac{1}{P^2} \quad or \quad F(P) = \frac{1}{P^2}$$

$$3 - f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{P^{n+1}} \quad or \quad F(P) = \frac{n!}{P^{n+1}}$$

$$4 - f(x) = e^{ax} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{1}{P-a} \quad or \quad F(P) = \frac{1}{P-a}$$

$$5 - f(x) = \sin ax \rightarrow \mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{P^2+a^2} \quad P > 0 \quad or \quad F(P) = \frac{a}{P^2+a^2}$$

$$6 - f(x) = \cos ax \rightarrow \mathcal{L}[\cos ax] = \frac{P}{P^2+a^2} \quad P > 0 \quad or \quad F(P) = \frac{P}{P^2-a^2}$$

نکته: تمام تبدیل فوق از طریق فرمول کلی تبدیل لاپلاس قابل حصول می‌باشد به عنوان مثال اگر تبدیل لاپلاس شماره 3 یعنی $f(x) = x^n$ در نظر گرفته شود:

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[x^n] = \int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx$$

انتگرال گیری جزء به جزء:

$$\begin{cases} x^n = u \quad \rightarrow \quad du = nx^{n-1}dx \\ e^{-px}dx = dv \quad \rightarrow v = \dfrac{-1}{P}e^{-px} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^\infty e^{-px}x^n\,dx = \left[\frac{-1}{P}x^n e^{-px}\right] - \int_0^\infty \frac{-1}{P}nx^{n-1}\,dx$$

$$\left[\frac{-1}{P}x^n e^{-px}\right] = 0$$

چرا که رشد e^{+px} بیشتر از x^n است یعنی:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{+px} \gg \lim_{x\to+\infty} x^n$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[x^n] = \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{p}\mathcal{L}[x^{n-1}] = \frac{n}{p}\cdot\frac{n-1}{p}\mathcal{L}[x^{n-2}]$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[x^n] = \frac{n}{p}\int_0^\infty e^{-px}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{p}\cdot\frac{n-1}{p}\cdot\frac{n-2}{p}\cdots\frac{1}{p}\mathcal{L}[1] = \frac{n!}{p^n}\times\frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

مثال: مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع مقابل:

$$f(x) = 3x^2 + 2\sin 3x - 5\cos 2x$$

جواب:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[3x^2 + 2\sin 3x - 5\cos 2x]$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = 3\mathcal{L}[x^2] + 2\mathcal{L}[\sin 3x] - 5\mathcal{L}[\cos 2x]$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = 3\times\frac{2!}{p^3} + 2\times\frac{3}{P^2+3^2} - 5\times\frac{P}{P^2+2^2}$$

تبدیل لاپلاس معکوس: تبدیل لاپلاس معکوس به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(p) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(x)$$

مثال: مطلوبست تبدیل تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{p^3}\right] = ?$$

جواب:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{p^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6 \times 2}{p^3}\right] = 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{p^{2+1}}\right] = 6 \times x^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{p^3}\right] = 6x^2$$

مثال: مطلوبست تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر:

$$1- \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(p+2)^2+9}\right] = ?$$

جواب:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(p+2)^2+9}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{p^2+3^2}\right] = 2\, sin\, 3x$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(p+2)+9}\right] = e^{-2x} \times 2\, sin\, 3x = 2\, e^{-2x}\, sin\, 3x$$

$$2- \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+3}{p^2+2p+5}\right] = ?$$

جواب:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+5} = \frac{p+1+2}{(p+1)^2+2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+3}{p^2+2p+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right] =$$

$$e^{-t}\cos 2x + e^{-x}\sin 2x =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+3}{p^2+2p+5}\right] = e^{-t}(\cos 2x + \sin 2x)$$

دستور انتقالی: هرگاه $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$ باشد آنگاه:

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(p) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = F(p-a)$$

به عنوان مثال می‌توان مثال های فوق را در نظر گرفت.

نکته: تبدیل لاپلاس های زیر جهت حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس مفید می‌باشد:

$$\mathcal{L}[y'] = p\mathcal{L}[y] - y(0)$$

$$\mathcal{L}[y''] = p^2\mathcal{L}[y] - p'\mathcal{L}(0) - y'(0)$$

مثال:معادله‌ی دیفرانسیلی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 0 \ \ , y'(0) = 3$$

جواب:

$$\mathcal{L}[y'' + 4y' + 4y] = \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[4y'] + \mathcal{L}[4y] = \mathcal{L}[0]$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

$$\rightarrow p^2\mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0) - 4\big(p\mathcal{L}[y] - y(0)\big) + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[y](p^2 - 4p + 4) = 3 \quad \rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{3}{p^2 - 4p + 4} = \frac{3}{(p-2)^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(p-2)^2}\right] = 3e^{3x} \times x$$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی دیفرانسیلی زیر:

$$y'' + 2y' + 2y = 2 \qquad y(0) = 0 \ \ , y'\ (0) = 1$$

جواب:

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y] = \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[2]$$

$$\rightarrow p^2\mathcal{L}[y] - py(0) - y'(0) + 2\big(p\mathcal{L}[y] - y(0)\big) + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[2]$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[y](p^2 + 2p + 2) = \mathcal{L}[2] + 1 = \frac{2}{p} + 1 \quad \rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{2+p}{p(p^2 + 2p + 2)}$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{Bp + c}{p^2 + 2p + 2}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases} \rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{1}{p} + \frac{-p-1}{p^2 + 2p + 2}$$

$$\rightarrow \quad y = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p} + \frac{-p-1}{p^2 + 2p + 2}]$$

$$\rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2 + 2p + 2}\right] = 1 - e^{-x}\cos x$$

$$final\ answer \quad \rightarrow \quad y = 1 - e^{-x}\cos x$$