

مدل سازی بارش رواناب با استفاده از اصل ماکزیمم آنتروپی (مطالعه موردی: حوضه کسپلیان)

رسول میرعباسی نجف آبادی*، یعقوب دین پژوه و احمد فاخری فرد^۱

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۷/۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۲/۲۴)

چکیده

برآورد دقیق رواناب یک حوضه در مدیریت منابع آب از اهمیت زیادی برخوردار می باشد. در این مطالعه رواناب ماهانه با استفاده از اطلاعات بارش و با مدل توزیع احتمالی شرطی بر اساس اصل حداکثر آنتروپی تخمین زده شد. برای توسعه این مدل از داده های بارش و رواناب حوضه رودخانه کسپلیان طی سال های ۱۳۴۹ تا ۱۳۸۵ استفاده گردید. پارامترهای مدل بر اساس اطلاعات پیشین حوضه از قبیل میانگین سری های زمانی بارش و رواناب و کوواریانس بین آنها تخمین زده شد. مقادیر رواناب ماهانه این حوضه، با استفاده از مدل توسعه داده شده، به ازای مقادیر ضریب رواناب و دوره های بازگشت مختلف در سطوح احتمال وقوع بارش مختلف محاسبه شد. نتایج نشان داد که مدل توسعه داده شده به ازای ضریب رواناب ۰/۶ به طور رضایت بخشی رواناب خروجی از حوضه را برای دوره های بازگشت مختلف تخمین می زند. هم چنین مقدار رواناب تخمینی، در یک سطح احتمال وقوع بارش ثابت و ضریب رواناب معین، با افزایش دوره بازگشت کاهش می یابد. با این حال، نرخ تغییر در میزان رواناب با افزایش دوره بازگشت به آرامی کم می شود.

واژه های کلیدی: حداکثر آنتروپی، بارش، رواناب، مدل توزیع احتمالاتی شرطی، حوضه کسپلیان

۱. به ترتیب دانشجوی دکتری، استادیار و دانشیار مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mirabbasi_r@yahoo.com

مقدمه

تاکنون مدل‌های فراوانی برای شبیه‌سازی فرایند بارش-رواناب در یک حوضه توسط محققان توسعه داده شده‌اند. در این خصوص می‌توان به مدل‌های ارائه شده توسط ناش (۱۶)، سوگوارا (۲۳) و سینگ و وولهایزر (۲۰) اشاره نمود. با توجه به اینکه میزان رواناب یک حوضه تحت تأثیر عوامل بسیاری است، بیشتر مدل‌های بارش-رواناب بر اساس اطلاعات مشاهداتی پیشین حوضه‌ها فرمول‌بندی و با یک مدل پارامتری بسط داده شده‌اند. پارامترهای این مدل‌ها بر اساس داده‌های مشاهداتی حوضه از قبیل بارش قبلی، رطوبت خاک، نرخ نفوذ، نگهداشت سطحی، میزان ذخیره و خصوصیات فیزیکی حوضه ارزیابی می‌گردند. هرچند، در بسیاری از مناطق جهان، کاربرد این گونه مدل‌ها بسیار محدود می‌شود زیرا بسیاری از داده‌های مورد نیاز اندازه‌گیری نشده و آنها هم که اندازه‌گیری می‌شوند از طول آماری کمی برخوردارند. یکی از روش‌هایی که برای تخمین رواناب با داده‌های سهل‌الوصول به کار می‌رود روشی است که بر مبنای اصل آنتروپی بنا نهاده شده است.

اصل حداکثر آنتروپی معیاری منطقی و در عین حال تجربی را برای انتخاب بهترین تابع توزیع احتمالاتی، از مجموعه‌ای از توزیع‌های موردنظر به‌دست می‌دهد. توزیعی بهترین خواهد بود که تابع آنتروپی را با توجه به محدودیت‌ها با حداقل خطا بیشینه می‌کند. افزون بر این، پارامترهای تابع توزیع آماری را می‌توان با استفاده توأم از اصل حداکثر آنتروپی و تکنیک بهینه‌سازی کلاسیک ضرایب لاگرانژ تخمین زد. در واقع آنتروپی معیاری از عدم قطعیت فرایندهای تصادفی هیدرولوژیک است که به‌طور غیرمستقیم محتوای اطلاعاتی اندازه‌گیری‌های زمانی-مکانی این فرایندها را منعکس می‌سازد. تئوری آنتروپی اولین بار توسط شانون (۱۷) توسعه داده شد و پس از آن به‌طور گسترده در مسائل مختلف علمی مورد استفاده قرار گرفته است. در زمینه‌های هیدرولوژیکی از مفهوم آنتروپی در تعیین فواصل بهینه نمونه‌برداری (۸)، طراحی و ارزیابی شبکه‌های پایش کیفیت آب (۹، ۱۰ و ۱۱)، طراحی و ارزیابی شبکه ایستگاه‌های

هیدرومتری (۴ و ۱۳)، پیش‌بینی کیفیت آب رودخانه‌ها (۱۰)، تخمین پارامترهای توزیع‌های فراوانی (۱۸ و ۱۹)، تفکیک (Disaggregation) مقادیر بارش روزانه به مقیاس ساعتی (۱۵)، بررسی و ارزیابی خصوصیات زمانی و مکانی بارش (۳، ۷ و ۱۴) استفاده شده است. اصل حداکثر آنتروپی در زمینه مدل‌سازی بارش-رواناب نیز توسط محققین به‌کار گرفته شده است. برای نمونه، سوناگا (۲۱) اصل حداکثر آنتروپی را در تحلیل فراوانی سیلاب به‌کار برد. او از اطلاعات موجود شامل میانگین و انحراف معیار برای تخمین پارامترهای تابع توزیع استفاده نمود. آموروچو و اسپیلدورا (۶) آنتروپی را برای ارزیابی عدم قطعیت مدل حوضه استنفورد در شبیه‌سازی رواناب یک حوضه در کالیفرنیا، به‌کار بردند.

سوناگا (۲۲) اصل حداکثر آنتروپی را برای مدل‌سازی فرایند بارش-رواناب به‌کار برد. او عبارت آنتروپی شرطی را براساس قیود معین برای به‌دست آوردن توزیع شرطی رواناب براساس رخداد بارش معین بیشینه نمود، آنگاه پارامترهای تابع توزیع مذکور را براساس اطلاعات موجود شامل میانگین سری زمانی داده‌های بارش و رواناب و کوواریانس آنها تخمین زد. اگرآوال و همکاران (۵) یک مدل توزیع احتمالی شرطی براساس حداکثر آنتروپی برای تخمین رواناب هفتگی و ماهانه حوضه سد ماتاتیلای روی رودخانه بتوا در هندوستان برای هفته‌ها و ماه‌هایی که مونسون فعال است، در یک دوره ۱۵ ساله، توسعه دادند. آنها پارامترهای مدل توزیع احتمال شرطی را برای ضرایب رواناب مختلف، در هر هفته و هر ماه در دوره زمانی مورد مطالعه تعیین نمودند. مدل توسعه داده شده برای تخمین رواناب هفتگی و ماهانه برای مقادیر مختلف ضریب رواناب و دوره‌های بازگشت در سطوح احتمال وقوع بارش مختلف در آن حوضه به‌کار رفت. نتایج نشان داد که مقدار رواناب تخمینی، در یک سطح احتمال وقوع بارش ثابت و ضریب رواناب معین، با افزایش دوره بازگشت کاهش می‌یابد. هدف این مطالعه کاربرد مدل توزیع احتمال شرطی بارش-رواناب مبتنی بر اصل حداکثر آنتروپی، برای تخمین رواناب ماهانه در سطوح مختلف

احتمال بارش برای دوره‌های بازگشت و ضرایب رواناب مختلف در حوضه رودخانه کسپلیان است.

مواد و روش‌ها

۱. منطقه مورد مطالعه و داده‌های مورد استفاده

منطقه مورد مطالعه حوضه آبریز کسپلیان، از زیرحوضه‌های رودخانه تالار، با مساحت ۶۶/۷۵ کیلومترمربع می‌باشد. موقعیت جغرافیایی این حوضه بین ۳۵° ۵۸' ۳۰" تا ۳۶° ۷' ۱۵" عرض شمالی و ۴۴° ۰۸' ۴۲" تا ۵۳° ۱۵' ۴۲" طول شرقی واقع شده است (شکل ۱). دامنه ارتفاعی این حوضه بین ۱۱۰۰ تا ۲۷۰۰ متر، با متوسط ۱۵۷۶ متر از سطح دریا می‌باشد. آب رودخانه اصلی حوضه از جنوب به سمت شمال غربی حوضه جریان دارد و در محلی به نام ولیک بن از حوضه خارج و به رودخانه تالار می‌ریزد. ایستگاه‌های هواشناسی حوضه کسپلیان متعلق به وزارت نیرو از سال ۱۳۴۹ تأسیس گردیده و شامل سه ایستگاه هواشناسی به نام‌های سنگده، درزیکلا و اوریمک می‌باشد. متأسفانه ایستگاه اوریمک از سال ۱۳۶۴ تعطیل شده است. هم‌چنین این حوضه دارای ۶ ایستگاه باران‌سنج معمولی (روزانه) به نام‌های سنگده، درزیکلا، اوریمک، سوت کلا، کله، ولیک چال و شش ایستگاه باران‌سنج ذخیره‌ای به نام‌های کشته، خاکستر، کته اوجا، پناکارا، خجیردشت، والرو و گتی‌نو است. متوسط بارندگی سالانه این حوضه در طول دوره آماری موجود با استفاده از ۱۲ ایستگاه باران‌سنجی با روش تیسن ۷۸۳/۴ میلی‌متر می‌باشد (۱). حداکثر بارندگی ۲۴ ساعته این حوضه ۵۸ میلی‌متر است که در ایستگاه سنگده در تاریخ ۱۳۶۹/۲/۲۳ ثبت شده است. حداکثر باران سالانه ۱۴۰۴/۳ میلی‌متر در ایستگاه باران‌سنج ذخیره‌ای گتی‌نو و ۱۳۲۶/۵ میلی‌متر در ایستگاه باران‌سنج معمولی ولیک‌چال ثبت شده است. توزیع زمانی بارش در این حوضه نسبتاً منظم است. سهم بارش فصل زمستان ۲۰/۴ درصد و سهم فصل تابستان ۳۰ درصد بارش سالانه می‌باشد. درصد بارندگی در فصول بهار و پائیز به ترتیب ۲۷/۵ و ۲۲/۱ درصد می‌باشد (۲). متوسط میزان تبخیر از تشت

کلاس A در طول دوره آماری موجود در ۳ ایستگاه سنگده، درزیکلا و اوریمک به ترتیب برابر با ۷۶۶، ۷۹۱ و ۷۳۸ میلی‌متر در سال می‌باشد که حداقل و حداکثر سالانه آن برابر با ۵۵۵ و ۹۹۱ میلی‌متر در ایستگاه سنگده بوده است. در این مطالعه آمار ایستگاه کلیماتولوژی سنگده واقع در ارتفاع ۱۳۷۰ متری از سطح دریا و در نزدیکی مرکز حوضه به دلیل طول و صحت آماری بیشتر مورد استفاده قرار گرفت. ایستگاه هیدرومتری حوضه در ارتفاع ۱۲۰۰ متر از سطح دریا و در نزدیکی روستای ولیک بن قرار دارد و مجهز به پارشال فلوم بتنی، اشل و لیمنوگراف است که می‌تواند دبی تا حدود ۲۰ مترمکعب بر ثانیه را اندازه‌گیری نماید (۱). در این مطالعه با توجه به کیفیت داده‌های موجود، از داده‌های رواناب ماهانه ایستگاه ولیک بن طی سال‌های ۱۳۴۹ تا ۱۳۸۵ استفاده گردید. بر اساس جمع‌بندی آمار موجود، متوسط آبدی سالانه رودخانه برابر با ۴۶۸/۰ مترمکعب بر ثانیه است که معادل ۱۴/۸۲ میلیون مترمکعب در سال می‌باشد. متوسط دبی ویژه رودخانه برابر ۷/۰۶ مترمکعب در ثانیه در کیلومترمربع است که معادل ارتفاع جریان ۲۱۸/۵ میلی‌متر می‌باشد.

۲. اصل آنتروپی

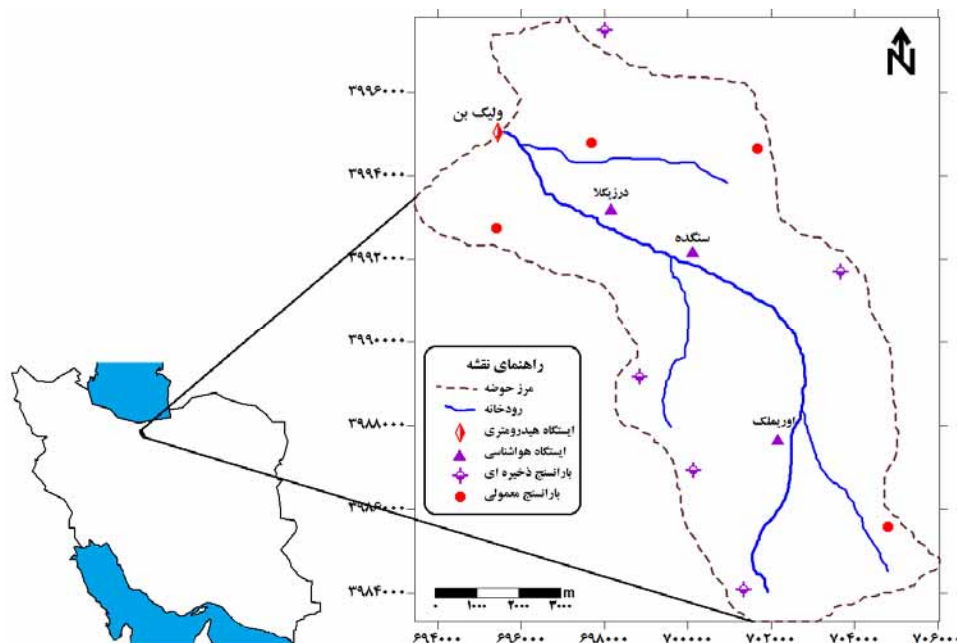
آنتروپی به صورت معیار عدم قطعیت یا امید ریاضی اطلاعات تعریف شده است (۱۵). اگر X یک متغیر تصادفی با توزیعی پیوسته باشد، آنگاه آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = -K \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log[f(x)] dx \quad [1]$$

که در آن $H(x)$ آنتروپی سیستم، $f(x)$ تابع چگالی احتمال و K ثابتی مثبت است که به صورت فاکتور مقیاس تعریف شده و به انتخاب واحد اندازه‌گیری وابسته می‌باشد. مفهوم آنتروپی را می‌توان برای جفت متغیرهای (x, y) از طریق آنتروپی توأم تعمیم داد که به صورت زیر بیان می‌شود (۵):

$$H(x, y) = -K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \log[f(x, y)] dx dy \quad [2]$$

که در آن $H(x, y)$ آنتروپی توأم سیستم و $f(x, y)$ تابع چگالی احتمال توأم برای x و y می‌باشند.



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی حوزه کسلیان

$$\sum_{x,y} yf(x,y) = \bar{y} \quad [5]$$

$$\sum_{x,y} xyf(x,y) = S_{xy} + \bar{x} / \bar{y} \quad [6]$$

که در آنها، $f(x,y)$ تابع احتمال توأم دو متغیره x و y ، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ میانگین های مربوطه و S_{xy} کوواریانس بین دو متغیر x و y می باشند. برای بهینه سازی آنتروپی، از تابع آنتروپی توأم (معادله ۲) دیفرانسیل گیری و برابر صفر قرار داده می شود:

$$d\{H(x,y)\} = - \left[\sum_{x,y} \{1 + \ln f(x,y)\} df(x,y) \right] = 0 \quad [7]$$

که آن را می توان با استفاده از تکنیک ضرایب لاگرانژ حل کرد. تابع لاگرانژ $L(x,\lambda)$ به صورت زیر است:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad [8]$$

که در آن، $f(x)$ تابع هدف، m تعداد کل قیدها، λ_j و g_j ($j = 1, 2, \dots, m$) به ترتیب ضرایب لاگرانژ و قیدها هستند.

۳. حداکثر آنتروپی

آنتروپی یک شاخص عدم قطعیت است که برای پیشامد خاصی از یک فرآیند تصادفی قابل تخمین است (۶). آنتروپی یک سیستم را می توان به وسیله به کار بردن روش بهینه سازی کلاسیک برای استخراج تابع توزیع احتمال بهینه نمود. اطلاعات مورد نیاز برای استخراج تابع توزیع اساساً برحسب محدودیت هایی است که براساس داده های مشاهداتی، تجربه، روابط ریاضی یا از هر منبع دیگر استخراج شده اند. پس از این که محدودیت ها (قیود) مشخص شدند، تابع توزیع به طور یکتا تعیین می گردد. به عبارت دیگر، برای مجموعه ای از قیدهای معین، یک توزیع منحصر به فرد برای x و y وجود خواهد داشت. برای تابع توزیع احتمال دو متغیره تصادفی گسسته، قیدهای زیر برای بهینه سازی آنتروپی توأم $H(x,y)$ فرایند دو متغیره در نظر گرفته می شوند (۵):

$$\sum_{x,y} f(x,y) = 1 \quad [3]$$

$$\sum_{x,y} xf(x,y) = \bar{x} \quad [4]$$

$$\lambda_0 = \sum_{x,y} \{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 xy\} \quad [14]$$

برای تعیین پارامترهای مدل از طرفین معادله ۱۳ نسبت به λ_1, λ_2 و λ_3 مشتق گرفته و قیود ۴ تا ۶ اعمال می‌شود. در زیر مراحل محاسبه پارامترهای تابع توزیع احتمال شرطی به‌طور خلاصه ارائه شده است. جزئیات بیشتر در مقاله آگروال و همکاران (۵) شرح داده شده است.

ابتدا تابع $E_1(\beta)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_1(\beta) = \left[-\gamma - \ln \beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n}{n! n} \right] \quad [15]$$

که در آن γ ثابت اولر و برابر با 0.5772156649 و $\beta = \lambda_1 \lambda_2 / \lambda_3$ می‌باشند. پارامترهای d_1 و d_2 با رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$d_1 = d_2 = -\beta / Z \quad [16]$$

که در آن Z عبارت است از:

$$Z = \left[1 - \frac{\exp(-\beta)}{\beta / E_1(\beta)} \right] \quad [17]$$

سپس پارامتر d_3 با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$d_3 = \frac{d_1 d_2}{\beta} \quad [18]$$

پارامتر "ضریب تغییرات ضریبی"، C_p ، با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$C_p = \frac{\beta Z^2 - \beta Z - 1}{\beta Z^2} \quad [19]$$

پارامتر C_p با توجه به داده‌های بارش و رواناب مشاهداتی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$C_p = \frac{S_{xy}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \quad [20]$$

که در آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین سری داده‌های بارش و رواناب و S_{xy} کوواریانس بین داده‌های بارش-رواناب می‌باشند. طبق معادله ۹ تابع توزیع احتمال شرطی تجمعی عبارت است از:

$$F(y/x) = \frac{\int_0^y f(x,y) dy}{P(x)} \quad [21]$$

۴. استخراج مدل توزیع احتمال شرطی

مدل توزیع احتمال شرطی بر اساس اصل حداکثر آنتروپی برای مدلسازی فرایند بارش-رواناب اولین بار توسط سوناگا (۲۲) توسعه داده شد. تابع توزیع احتمال شرطی y به شرط معلوم بودن مقدار x را می‌توان با استفاده از تئوری بیزی (Bayesian) به صورت زیر نوشت (۵):

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{p(x)} \quad [9]$$

که در آن $f(y/x)$ تابع احتمال شرطی، $f(x,y)$ تابع احتمال توأم دو متغیره و $p(x)$ احتمال عدم تجاوز متغیر x می‌باشند. تابع توزیع احتمال $f(x,y)$ می‌تواند از آنتروپی ماکزیمم شده معادله ۷ و تابع لاگرانژ (معادله ۸) با کاربرد روش بهینه‌سازی کلاسیک به‌دست آید. با معرفی مجهولات یا ضرایب لاگرانژ به صورت $(\lambda_0 - 1)$ ، λ_1 ، λ_2 و λ_3 ، معادله ۷ را می‌توان به فرم تابع لاگرانژ زیر در نظر گرفت:

$$\sum_{x,y} \left\{ 1 + \ln f(x,y) + (\lambda_0 - 1) + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 xy \right\} df(x,y) = 0 \quad [10]$$

یا

$$f(x,y) = \sum_{x,y} \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 xy) \quad [11]$$

۵. پارامترهای مدل

با محاسبه ضرایب لاگرانژ، توزیع احتمال شرطی به‌دست می‌آید. تعداد پارامترها برابر با تعداد قیود (m) است. اطلاعات لازم برای برآورد پارامترها شامل الف) میانگین متغیر x یا $\bar{x}$ ، ب) میانگین متغیر y یا $\bar{y}$ و ج) کواریانس x و y یا S_{xy} هستند. مقادیر پارامترهای λ_0 ، λ_1 ، λ_2 و λ_3 را می‌توان با برابر قرار دادن معادلات ۳ و ۱۱ به شرح زیر به‌دست آورد (۵):

$$f(x,y) = \sum_{x,y} \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 xy) = 1 \quad [12]$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$\lambda_0 = \ln \sum_{x,y} \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 xy\} \quad [13]$$

یا

C_p ، به ترتیب با استفاده از روابط ۱۷ و ۱۹ محاسبه شدند که خلاصه آنها در جدول ۱ آورده شده است. سپس مقدار ضریب C_p از معادله ۲۰ با توجه به داده های مشاهداتی بارش و رواناب محاسبه شد. عدد به دست آمده با مقادیر جدول ۱ مقایسه و β و Z متناظر با آن استخراج گردید. با در دست داشتن β و Z ، مقادیر پارامترهای d_1, d_2, d_3 و k به ترتیب از معادلات ۱۶، ۱۸، ۱۶ و ۲۴ به دست می آیند. بعد از تعیین پارامترها، تابع احتمال شرطی در مقیاس زمانی ماهانه به ازای ضریب رواناب، α ، معلوم به دست می آید. در شکل ۲ مراحل محاسبه پارامترهای تابع توزیع احتمال شرطی و تخمین رواناب حاصل از بارش معین بازای دوره بازگشت و ضریب رواناب معلوم از روی مقادیر مشاهداتی بصورت طرح واره نشان داده شده است. مدل توزیع احتمال شرطی بارش رواناب روی حوضه کسلیان برای پیش بینی رواناب در مقیاس ماهانه و در شش دوره بازگشت مختلف ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ ساله به کار برده شد. احتمالات شرطی تجمع رواناب برای بارش معلوم $F(y/x)$ برای دوره های بازگشت T انتخابی با استفاده از معادله ۲۷ به دست آمد.

احتمالات تجاوز مربوط به بارش، $P(x)$ ، برای سری بارش ماهانه در خلال سال های ۱۳۴۹ تا ۱۳۸۵ به وسیله فرمول ویبل تعیین گردید. پس از محاسبه مقادیر $F(y/x)$ و $P(x)$ ، مقدار تابع $g(v)$ با استفاده از معادله ۲۵ برای دوره های بازگشت انتخابی به دست آمد. آنگاه شش مقدار فرضی برای ضریب رواناب، α ، شامل ۰/۴، ۰/۵، ۰/۶، ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ در نظر گرفته شد. نسبت رواناب به میانگین دراز مدت رواناب، v ، با معلوم بودن تابع $g(v)$ بودن تابع $g(v)$ و پارامترهای مدل با استفاده از روش عددی نیوتن رافسون از رابطه ۲۶ تخمین زده شد. سپس مقدار رواناب، y ، از ضرب کردن میانگین دراز مدت رواناب ماهانه، $\bar{y}$ ، در مقدار v به دست آمد. این عملیات برای همه ماه های سال انجام شد که برای رعایت اصل خلاصه نویسی فقط نتایج مربوط به ماه اردیبهشت ارائه شد.

که در آن، $F(y/x)$ تابع توزیع احتمال شرطی تجمع y برای یک x معین، $f(x,y)$ تابع چگالی احتمال و $P(x)$ احتمال تجمع y مربوط به داده های بارش (x) است که از فرمول موقعیت نموداری ویبل به صورت زیر به دست می آید:

$$P(x) = \frac{M}{N+1} \quad [22]$$

که در آن M رتبه یک رویداد در ترتیب نزولی و N تعداد کل رویدادهاست.

اگر u و v به ترتیب نشان دهنده بارش بی بعد $(x/\bar{x})$ و رواناب بی بعد $(y/\bar{y})$ باشند، آنگاه رابطه u با v به صورت $v = \alpha u$ است که در آن α ضریب رواناب است. طبق آگروال و همکاران (۵) توزیع احتمال شرطی تجمع (معادله ۲۱) به صورت زیر است:

$$F(y/x) = \frac{k \exp(-d_1 v / \alpha) \{1 - \exp(-d_2 v - d_3 v^2 / \alpha)\}}{\bar{x} (d_2 + d_3 v / \alpha) P(x)} \quad [23]$$

که در آن k عبارت است از:

$$k = \frac{d_3 \exp(-\beta)}{E_1(\beta)} \quad [24]$$

معادله ۲۴ را می توان به صورت زیر ساده تر کرد:

$$F(y/x) = \frac{g(v)}{\bar{x} P(x)} \quad [25]$$

که در آن تابع $g(v)$ عبارت است از:

$$g(v) = \frac{k \exp(-d_1 v / \alpha) \{1 - \exp(-d_2 v - d_3 v^2 / \alpha)\}}{d_2 + d_3 v / \alpha} \quad [26]$$

برای توزیع احتمالی شرطی، دوره بازگشت T به صورت زیر بیان می گردد:

$$T(y/x) = \frac{1}{1 - F(y/x)} \quad [27]$$

که در آن، $T(y/x)$ دوره بازگشت رواناب برای یک رویداد بارش معین و $F(y/x)$ تابع توزیع احتمال شرطی تجمع رواناب y به ازای بارش معین x است.

برای محاسبه پارامترهای توزیع احتمال شرطی ابتدا مقادیر انتگرال نمائی $E_1(\beta)$ برای مقادیر مختلف ضریب β از ۰/۱ تا ۱۰ تعیین و سپس مقادیر تابع Z و ضریب تغییرات ضریب،

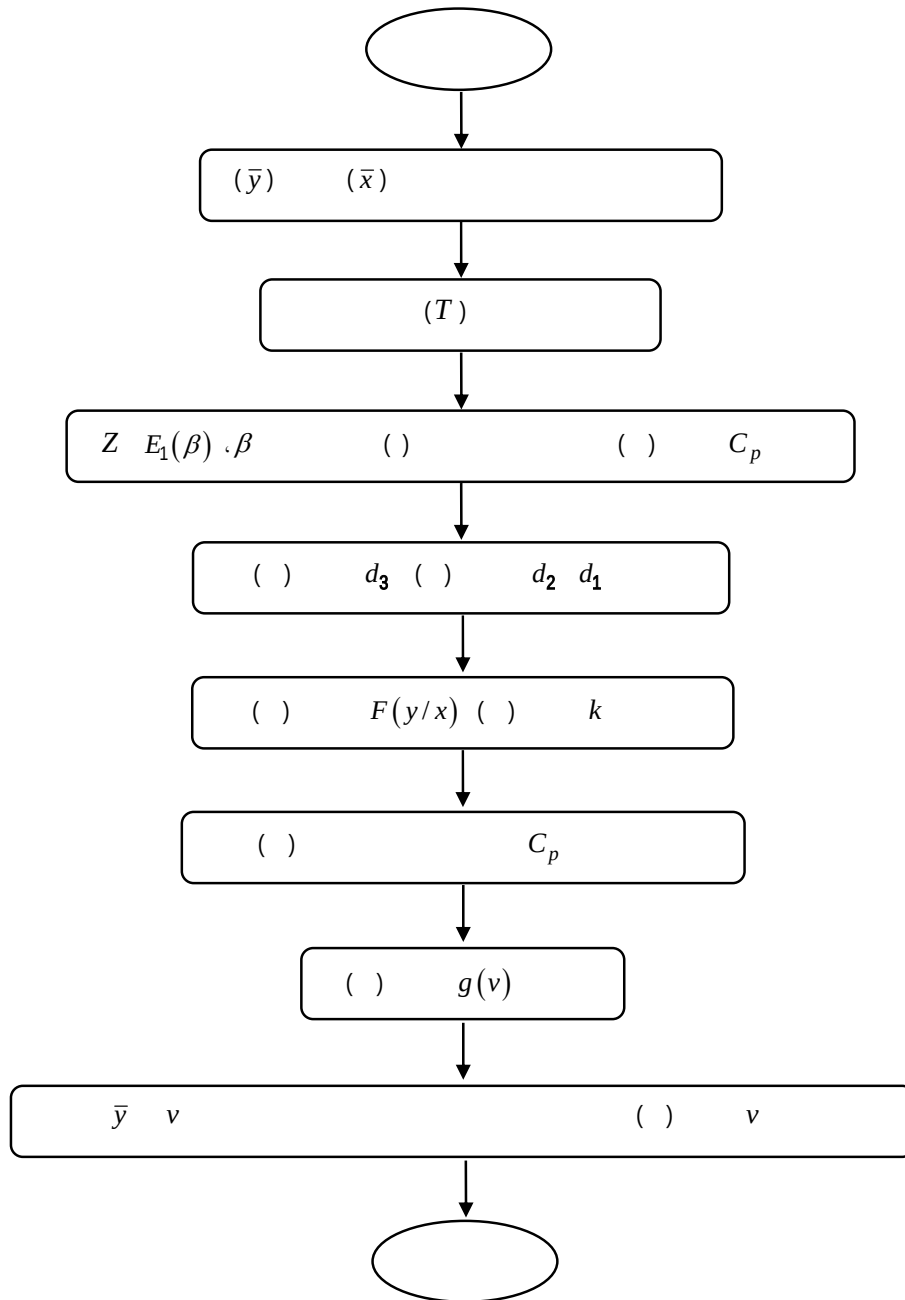
جدول ۱. مقادیر محاسبه شده انتگرال نمائی $E_1(\beta)$ ، تابع Z و ضریب تغییرات ضریبی C_n برای مقادیر مختلف ضریب β .

[illegible]

نتایج و بحث

جدول ۲ مقادیر برآورد شده پارامترهای تابع توزیع احتمال شرطی بر اساس سری داده‌های ماهانه حوضه کسپلیان در خلال سال‌های ۱۳۴۹ تا ۱۳۸۵ را برای ماه‌های مختلف نشان می‌دهد. مقدار پارامتر C_p با توجه به سری داده‌های بارش و رواناب هر ماه به دست آمد. به ازای C_p به دست آمده، مقدار β ، $E_1(\beta)$ و Z مانند از جدول ۱ استخراج و در جدول ۲ آورده شده‌اند. بقیه پارامترها شامل d_1 ، d_2 ، d_3 و k به ترتیب از معادلات ۱۶، ۱۶، ۱۸ و ۲۴ محاسبه و در جدول ۲ درج شده‌اند. جدول ۳ نمونه‌ای از رواناب محاسبه شده در حوضه کسپلیان را در اردیبهشت ماه به ازای احتمالات مختلف وقوع بارش، مقادیر ضریب رواناب و دوره‌های بازگشت مختلف نشان می‌دهد. به طوریکه از این جدول می‌توان استنباط کرد، در یک سطح احتمال وقوع بارش معین و ضریب رواناب معلوم، با افزایش

دوره بازگشت مقدار رواناب برای همه ماه‌ها، کاهش می‌یابد. هرچند، نرخ کاهش مقادیر رواناب با افزایش دوره بازگشت به تدریج کاهش می‌یابد. کاهش میزان رواناب با افزایش دوره بازگشت در این مدل، به دلیل شرط وقوع مقدار بارش معین می‌باشد. زیرا به ازای مقدار بارش معین برای ضریب رواناب معلوم، رواناب ایجاد شده نمی‌تواند از مقدار معینی بیشتر باشد، بنابراین، با افزایش دوره بازگشت میزان رواناب کاهش پیدا می‌کند. هم‌چنین با توجه به جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای یک دوره بازگشت و سطح احتمال وقوع بارش خاص، با افزایش ضریب رواناب، مقدار رواناب خروجی از حوضه افزایش می‌یابد. این نتایج با نتایج آگراوال و همکاران (۵) برای حوضه سد ماتاتیلای روی رودخانه بتوا در هندوستان کاملاً همخوانی دارد.



شکل ۲. طرح‌واره محاسبه پارامترهای تابع توزیع احتمال شرطی و تخمین رواناب حاصل از بارش معین به ازای دوره بازگشت و ضریب رواناب معلوم

جدول ۲. پارامترهای مدل توزیع احتمال شرطی بارش - رواناب حوضه کسپلیان برای ماههای مختلف (۱۳۸۵-۱۳۴۹).

ماه	(C_p)	β	$E_1(\beta)$	Z	پارامترها		
					d_1	d_2	d_3
فروردین	۰/۱۱۴۴	۵/۵۰۵۰	۰/۰۰۰۶	-۰/۱۵۹۲	۰/۸۷۶۴	۰/۸۷۶۴	۰/۱۳۹۵
اردیبهشت	۰/۴۰۹۱	۰/۴۳۱۹	۰/۶۵۱۸	-۱/۳۰۶۷	۰/۵۶۴۳	۰/۵۶۴۳	۰/۷۳۴۵
خرداد	۰/۱۰۶۱	۶/۱۴۲۱	۰/۰۰۰۳	-۰/۱۴۴۲	۰/۸۸۵۸	۰/۸۸۵۸	۰/۸۹۷۸
تیر	۰/۳۴۵۴	۰/۶۸۲۷	۰/۳۸۶۳	-۰/۹۱۵۸	۰/۶۲۵۲	۰/۶۲۵۲	۰/۷۴۸۹
مرداد	۰/۳۹۰۹	۰/۵۲۷۷	۰/۵۲۷۵	-۱/۱۱۹۴	۰/۵۹۰۷	۰/۵۹۰۷	۰/۷۳۹۵
شهریور	۰/۳۶۵۹	۰/۵۸۷۹	۰/۴۶۵۷	-۱/۰۲۹۳	۰/۶۰۵۱	۰/۶۰۵۱	۰/۷۴۳۰
مهر	۰/۲۰۱۳	۲/۱۸۲۸	۰/۰۳۸۱	-۰/۳۵۶۶	۰/۷۷۸۳	۰/۷۷۸۳	۰/۸۲۱۸
آبان	۰/۲۷۹۹	۱/۱۲۳۳	۰/۱۷۹۱	-۰/۶۱۶۵	۰/۶۹۲۵	۰/۶۹۲۵	۰/۷۷۵۳
آذر	۰/۰۹۶۰	۷/۰۷۲۰	۰/۰۰۰۱	-۰/۱۲۶۹	۰/۸۹۷۱	۰/۸۹۷۱	۰/۹۰۶۹
دی	۰/۱۰۴۵	۶/۲۷۸۸	۰/۰۰۰۳	-۰/۱۴۱۴	۰/۸۸۷۶	۰/۸۸۷۶	۰/۸۹۹۳
بهمن	۰/۰۸۵۰	۸/۳۶۰۶	۰/۰۰۰۱	-۰/۱۰۸۸	۰/۹۰۹۵	۰/۹۰۹۵	۰/۹۱۷۱
اسفند	۰/۰۹۰۱	۷/۷۲۵۱	۰/۰۰۰۱	-۰/۱۱۷۰	۰/۹۰۳۸	۰/۹۰۳۸	۰/۹۱۲۴

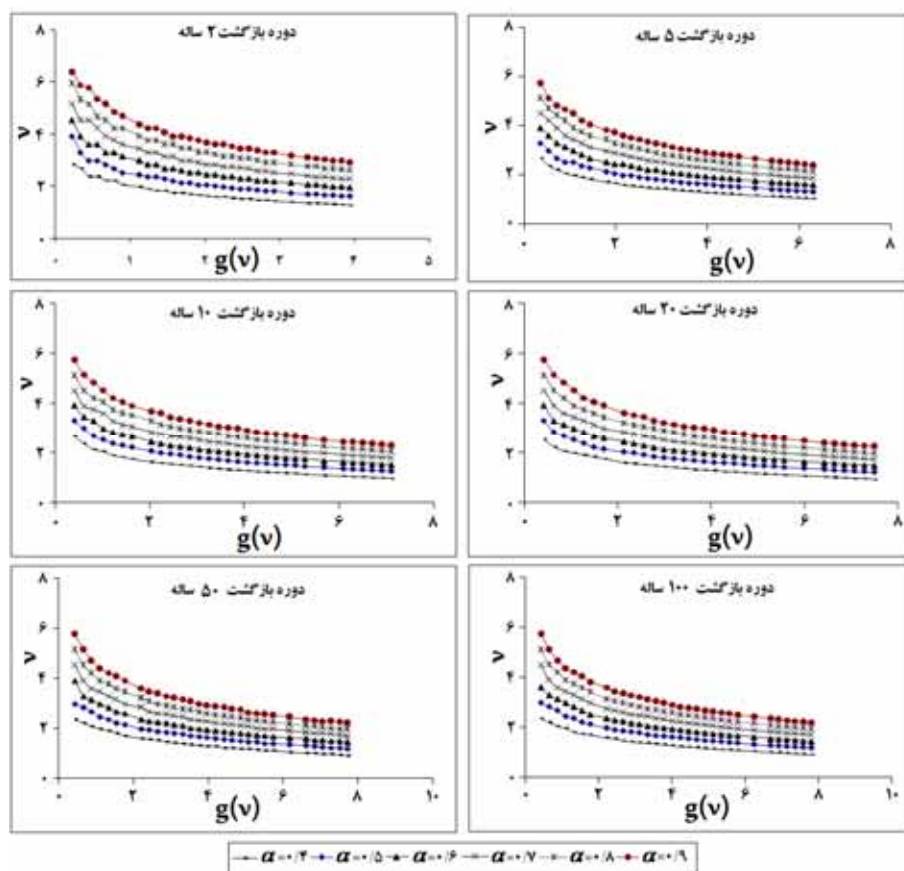
میانگین مقدار مشاهداتی رواناب در ماه اردیبهشت و در حوضه کسپلیان در دوره آماری (۱۳۴۹ تا ۱۳۸۵) برابر ۰/۶۵ مترمکعب بر ثانیه است، با توجه به جدول ۳، این رقم بسیار نزدیک به مقدار تخمین‌زده شده از روی مدل برای رواناب در سطح احتمال ۵۰٪ بازای ضریب رواناب ۵٪ و دوره بازگشت ۲ سال است. هم‌چنین رقم مذکور بازای مقادیر ضریب رواناب ۵٪، ۰/۶، ۰/۶، ۰/۶ و ۰/۷ به ترتیب در دوره‌های بازگشت ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ ساله بسیار نزدیک است.

از مقایسه میانگین مقادیر مشاهداتی رواناب ماهانه حوضه کسپلیان با مقادیر حاصل از مدل برای سایر ماه‌های سال نیز نتایج مشابهی به دست آمد. بنابراین، می‌توان استنباط کرد که مدل توسعه داده شده به ازای ضریب رواناب حدود ۰/۶ به‌طور رضایت بخشی رواناب خروجی از حوضه را برای دوره‌های بازگشت مختلف تخمین می‌زند. آگراوال و همکاران (۵) با استنباطی مشابه مقدار ضریب رواناب ۷٪ را برای حوضه سد ماتاتیلای روی رودخانه بتوا در هندوستان توصیه نمودند. شریفی و همکاران (۲) با استفاده از اطلاعات مربوط به ۳۱ سیلاب در

حوضه کسپلیان که منحصراً از اواخر خرداد تا اوایل آبان رخ داده بودند و با تعیین شماره منحنی (CN) برای مناطق مختلف حوضه با توجه به پوشش و کاربری اراضی آن، ضریب رواناب را برای مناطق مختلف این حوضه به‌دست آورده‌اند که با میانگین‌گیری وزنی مقدار ضریب رواناب متوسط برای کل حوضه حدود ۰/۳۳ به‌دست می‌آید. این مقدار با نتایج مطالعه حاضر متفاوت است. به نظر می‌رسد این اختلاف به دلیل تفاوت در محدوده زمانی مورد بررسی در دو مطالعه باشد. در مطالعه حاضر ضریب رواناب به‌طور ماه به ماه بحث شده ولی در مطالعه شریفی و همکاران (۲) ضریب رواناب بر اساس سیلاب‌های مشاهداتی در محدوده زمانی اواخر خرداد تا اوایل آبان تعیین شده است. شکل ۳ نمودار تغییرات رواناب استاندارد شده v (نسبت رواناب به میانگین رواناب) را به ازای تابع $g(v)$ برای مقادیر مختلف ضریب رواناب α و دوره بازگشت T در اردیبهشت ماه در حوضه کسپلیان نشان می‌دهد. از این شکل می‌توان مشاهده نمود که نسبت v به‌طور نمایی با تابع $g(v)$ برای همه مقادیر دوره بازگشت و ضریب رواناب

جدول ۳. مقادیر رواناب تخمینی مدل برای دوره‌های بازگشت و ضرایب رواناب مختلف در سطوح احتمال بارش مختلف برای اردیبهشت ماه در حوضه کسلیان.

رواناب تخمینی (m^3/s)									ضریب رواناب (α)	دوره بازگشت (سال)
احتمال وقوع بارش										
۰/۹۵	۰/۸۴	۰/۷۶	۰/۶۵	۰/۵۰	۰/۳۸	۰/۳۰	۰/۲۲	۰/۱۱		
۰/۴۳	۰/۴۵	۰/۴۷	۰/۵۰	۰/۵۴	۰/۵۹	۰/۶۴	۰/۶۹	۰/۸۰	۰/۴	۲
۰/۵۵	۰/۵۸	۰/۵۹	۰/۶۳	۰/۶۷	۰/۷۵	۰/۸۰	۰/۸۵	۱/۰۱	۰/۵	
۰/۶۷	۰/۶۹	۰/۷۲	۰/۷۵	۰/۸۲	۰/۹۰	۰/۹۶	۱/۰۶	۱/۲۲	۰/۶	
۰/۷۷	۰/۸۰	۰/۸۴	۰/۸۸	۰/۹۶	۱/۰۶	۱/۱۱	۱/۲۲	۱/۵۳	۰/۷	
۰/۸۸	۰/۹۳	۰/۹۶	۱/۰۳	۱/۰۹	۱/۲۲	۱/۲۷	۱/۴۳	۱/۷۴	۰/۸	
۰/۹۸	۱/۰۳	۱/۰۷	۱/۱۴	۱/۲۲	۱/۳۲	۱/۴۳	۱/۵۸	۱/۹۵	۰/۹	
۰/۳۷	۰/۴۰	۰/۴۲	۰/۴۳	۰/۴۶	۰/۵۱	۰/۶۰	۰/۶۴	۰/۷۵	۰/۴	۵
۰/۴۸	۰/۵۰	۰/۵۲	۰/۵۷	۰/۶۵	۰/۶۶	۰/۷۲	۰/۸۱	۰/۹۰	۰/۵	
۰/۵۶	۰/۵۷	۰/۶۰	۰/۶۶	۰/۶۹	۰/۷۹	۰/۸۵	۰/۹۸	۱/۱۱	۰/۶	
۰/۶۴	۰/۶۷	۰/۷۰	۰/۷۵	۰/۸۳	۰/۹۰	۱/۰۰	۱/۱۲	۱/۳۲	۰/۷	
۰/۷۳	۰/۷۶	۰/۷۹	۰/۸۸	۰/۹۵	۱/۰۶	۱/۱۴	۱/۳۱	۱/۵۳	۰/۸	
۰/۸۳	۰/۸۶	۰/۸۸	۰/۹۶	۱/۱۳	۱/۲۱	۱/۲۷	۱/۴۵	۱/۶۳	۰/۹	
۰/۳۴	۰/۳۶	۰/۳۹	۰/۴۱	۰/۴۵	۰/۵۰	۰/۵۷	۰/۶۱	۰/۷۲	۰/۴	۱۰
۰/۴۴	۰/۴۶	۰/۴۸	۰/۵۳	۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۶۷	۰/۷۷	۰/۹۰	۰/۵	
۰/۵۳	۰/۵۴	۰/۵۶	۰/۶۲	۰/۶۶	۰/۷۶	۰/۸۲	۰/۹۴	۱/۱۱	۰/۶	
۰/۶۰	۰/۶۴	۰/۶۷	۰/۷۱	۰/۷۸	۰/۸۸	۰/۹۵	۱/۰۸	۱/۲۷	۰/۷	
۰/۶۹	۰/۷۳	۰/۷۶	۰/۸۴	۰/۹۰	۱/۰۱	۱/۰۸	۱/۲۳	۱/۴۳	۰/۸	
۰/۷۸	۰/۸۴	۰/۸۵	۰/۹۲	۱/۰۱	۱/۱۵	۱/۲۲	۱/۳۹	۱/۶۳	۰/۹	
۰/۳۲	۰/۳۴	۰/۳۷	۰/۳۹	۰/۴۴	۰/۴۹	۰/۵۴	۰/۵۹	۰/۶۹	۰/۴	۲۰
۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۴۶	۰/۵۰	۰/۵۶	۰/۶۰	۰/۶۶	۰/۷۴	۰/۹۰	۰/۵	
۰/۵۰	۰/۵۲	۰/۵۵	۰/۵۹	۰/۶۵	۰/۷۳	۰/۸۰	۰/۹۱	۱/۰۶	۰/۶	
۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۶۵	۰/۶۹	۰/۷۴	۰/۸۵	۰/۹۳	۱/۰۴	۱/۲۲	۰/۷	
۰/۶۷	۰/۷۱	۰/۷۴	۰/۸۰	۰/۸۸	۰/۹۷	۱/۰۵	۱/۱۸	۱/۴۳	۰/۸	
۰/۷۶	۰/۸۱	۰/۸۳	۰/۸۹	۰/۹۸	۱/۱۲	۱/۱۹	۱/۳۴	۱/۶۳	۰/۹	
۰/۳۱	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۳۷	۰/۴۳	۰/۴۸	۰/۵۲	۰/۵۸	۰/۶۹	۰/۴	۵۰
۰/۴۰	۰/۴۲	۰/۴۴	۰/۴۸	۰/۵۵	۰/۵۹	۰/۶۴	۰/۷۲	۰/۹۰	۰/۵	
۰/۴۸	۰/۵۱	۰/۵۴	۰/۵۷	۰/۶۳	۰/۷۱	۰/۷۸	۰/۸۸	۱/۰۶	۰/۶	
۰/۵۶	۰/۶۱	۰/۶۳	۰/۶۸	۰/۷۰	۰/۸۳	۰/۹۰	۱/۰۲	۱/۲۲	۰/۷	
۰/۶۶	۰/۷۰	۰/۷۳	۰/۷۸	۰/۸۶	۰/۹۵	۱/۰۳	۱/۱۵	۱/۴۳	۰/۸	
۰/۷۴	۰/۷۹	۰/۸۲	۰/۸۸	۰/۹۷	۱/۰۹	۱/۱۶	۱/۳۱	۱/۵۸	۰/۹	
۰/۳۰	۰/۳۱	۰/۳۴	۰/۳۶	۰/۴۲	۰/۴۷	۰/۵۱	۰/۵۷	۰/۶۹	۰/۴	۱۰۰
۰/۳۹	۰/۴۱	۰/۴۳	۰/۴۷	۰/۵۴	۰/۵۸	۰/۶۳	۰/۷۱	۰/۹۰	۰/۵	
۰/۴۷	۰/۵۰	۰/۵۳	۰/۵۶	۰/۶۱	۰/۶۹	۰/۷۷	۰/۸۵	۱/۰۶	۰/۶	
۰/۵۵	۰/۶۰	۰/۶۲	۰/۶۷	۰/۶۸	۰/۸۲	۰/۸۹	۱/۰۱	۱/۲۲	۰/۷	
۰/۶۵	۰/۶۹	۰/۷۲	۰/۷۷	۰/۸۵	۰/۹۴	۱/۰۱	۱/۱۳	۱/۴۳	۰/۸	
۰/۷۳	۰/۷۸	۰/۸۰	۰/۸۶	۰/۹۶	۱/۰۷	۱/۱۴	۱/۲۹	۱/۵۸	۰/۹	



شکل ۳. نمودارهای تغییرات رواناب استاندارد شده v (نسبت رواناب به میانگین رواناب) به ازای تابع $g(v)$ برای مقادیر مختلف ضریب رواناب α و دوره بازگشت T در اردیبهشت ماه برای حوضه کسلیان

رواناب $0/6$ موردنظر باشد، با توجه به رابطه 27 مقدار $F(y/x)$ برابر $0/95$ به دست می آید. با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه 25 مقدار تابع $g(v)$ معادل $6/08$ به دست می آید. اینک در شکل ۳ از روی نمودار مربوط به دوره بازگشت 20 ساله و منحنی مربوط به ضریب رواناب $0/6$ مقدار رواناب بی بعد (v) به ازای $g(v) = 6/08$ حدود $1/7$ تخمین زده می شود. با توجه به اینکه مقدار میانگین رواناب ماهانه اردیبهشت ماه در حوضه کسلیان $0/65$ مترمکعب بر ثانیه است، مقدار رواناب ماهانه با دوره بازگشت 20 ساله با فرض ضریب رواناب $0/6$ به شرط وقوع بارشی به ارتفاع 30 میلی متر معادل $1/11$ ($1/7 \times 0/65$) مترمکعب بر ثانیه به دست می آید.

کاهش می یابد. با داشتن مقادیر میانگین بارش $\bar{X}$ ، میانگین رواناب $\bar{y}$ ، احتمال بارش $P(x)$ و احتمال شرطی رواناب $F(y/x)$ برای مقادیر ضریب رواناب و دوره بازگشت مختلف، می توان با استفاده از این نمودارها مقدار رواناب حوضه کسلیان را در ماه اردیبهشت تعیین نمود. برای مثال اگر میانگین بارش اردیبهشت ماه 80 میلی متر و مقدار بارش مشاهده شده در یک سال بخصوص، برای ماه مذکور 30 میلی متر باشد و رتبه این رویداد بین مشاهدات در ترتیب صعودی 3 فرض شود، با توجه به اینکه کل داده ها برابر $N = 37$ (دوره $1385-1349$) می باشد، بنابراین مقدار $P(x)$ از رابطه 22 معادل $0/08$ به دست می آید. اگر تخمین رواناب ماهانه اردیبهشت ماه با دوره بازگشت 20 ساله و ضریب

نتیجه گیری

در این مطالعه با استفاده از مدل توزیع احتمال شرطی، مبتنی بر اصل حداکثر آنتروپی، رواناب حوضه کسپلیان مدل‌بندی شد. میزان رواناب ماهانه حوضه پس از تخمین پارامترها بازای دوره‌های بازگشت مختلف و ضریب رواناب از روی مقادیر مشاهداتی تخمین‌زده شد. نتایج نشان داد که مدل توسعه داده شده به ازای ضریب رواناب $0/6$ به‌طور رضایت بخشی رواناب خروجی از حوضه را برای دوره‌های بازگشت مختلف تخمین می‌زند. به منظور تخمین آسان و سریع رواناب حوضه مورد مطالعه نمودارهای $g(v)$ تابعی از v (نسبت رواناب به میانگین رواناب) برای منطقه مورد مطالعه رسم شدند که در تعیین مقدار رواناب حوضه در سطوح احتمال متفاوت برای

مقدار ضریب رواناب و دوره بازگشت معین حوضه مذکور بسیار قابل استفاده هستند. نتایج نشان داد که به‌طور کل، در یک سطح احتمال و ضریب رواناب معین، رواناب تخمینی با افزایش دوره بازگشت، کاهش می‌یابد، هرچند، نرخ کاهش با افزایش دوره بازگشت کم می‌شود. با توجه به قابلیت‌های بالای مدل ماکزیمم آنتروپی در تخمین رواناب ماهانه حوضه، پیشنهاد می‌شود که مدل بارش- رواناب مذکور برای حوضه‌های دیگر کشور نیز توسعه داده شود و نتایج آنها با نتایج دیگر مدل‌های بارش- رواناب متداول مقایسه شود.

منابع مورد استفاده

۱. بی‌نام. ۱۳۸۰. گزارش‌های آماری حوضه آبریز کسپلیان. سازمان تحقیقات منابع آب.
۲. شریفی، م.، ح. رفاهی و م. م. اردلان. ۱۳۷۵. ارزیابی ضریب رواناب ناشی از بارش در حوضه معرف کسپلیان، مجله علوم کشاورزی ایران ۲۷(۳): ۶۳-۷۹.
۳. مسعودیان س. ا. ۱۳۸۵. مرزبندی مناطق آبی ایران به کمک شاخص آشفستگی بارش. مجله پژوهشی علوم انسانی دانشگاه اصفهان ۲۰(۱): ۱-۱۴.
4. Al-Zahrani, M. and T. Husain. 1998. An algorithm for designing a precipitation network in the south-western region of Saudi Arabia. J. Hydrol. 205: 205-216.
5. Agrawal, D., J. K. Singh and A. Kumar. 2005. Maximum entropy-based conditional probability distribution runoff model. Biosys. Eng. 90(1): 103-113.
6. Amoroch, J. and B. Espildora. 1973. Entropy in the assessment of uncertainty in hydrologic systems and models. Water Resour. Res. 9(6): 1551-1522.
7. Brunsell, N. A. 2010. A multiscale information theory approach to assess spatial-temporal variability of daily precipitation. J. Hydrol. 385: 165-172.
8. Harmancioglu, N. B. 1984. Entropy concept as used in determination of optimum sampling intervals. Proc. of Hydrosoft 84, International Conf. on Hydraulic Engineering Software, September 10-14, 1984. Portoroz, Yugoslavia, pp. 6-99 and 6-110.
9. Harmancioglu, N. B. and N. Alpaslan. 1992. Water quality monitoring network design: A problem of multi-objective decision making. Water Resour. Bull. 28(1): 179-192.
10. Jha, R. and V. P. Singh. 2008. Evaluation of riverwater quality by entropy. KSCE J. Civil Eng. 12(1): 61-69.
11. Karamouz, M., A. K. Nokhandan, R. Kerachian and C. Maksimovic. 2009. Design of on-line river water quality monitoring systems using the entropy theory: a case study. Environ. Monit. Assess. 155(1-4): 63-81.
12. Masoumi, F. and R. Kerachian. 2008. Assessment of the groundwater salinity monitoring network of the Tehran region: application of the discrete entropy theory. Water Sci. Technol. 58(4): 765-771.
13. Mishra, A.K. and P. Coulibaly. 2010. Hydrometric network evaluation for Canadian watersheds. J. Hydrol. 380: 420-437.
14. Mishra, A.K., M. Ozger and V. P. Singh. 2009. An entropy-based investigation into the variability of precipitation. J. Hydrol. 370: 139-154.

15. Montesarchio, V. and F. Napolitano. 2010. A single-site rainfall disaggregation model based on entropy. International Workshop Advances in Statistical Hydrology. May 23-25, Taormina, Italy.
16. Nash, J. E. 1957. The form of the instantaneous unit hydrograph. IASH Pub., 45 (3): 114–121.
17. Shannon, C.E. 1948. A mathematical theory of communications, I and II. Bell Sys. Technol. J. 27: 379-423.
18. Singh, V. P. 1987. On derivation of the extreme value (EV) type III distribution for low flows using entropy. Hydrol. Sci. J. 32(4): 521-533.
19. Singh, V. P. and K. Singh. 1985. Derivation of the Pearson type (PT)-III distribution by using the principle of maximum entropy (POME). J. Hydrol. 80: 197–214.
20. Singh, V. P. and D. A. Woolhiser. 2002. Mathematical modeling of watershed hydrology. J. Hydrol. Eng. 7(4): 270-292.
21. Sonuga, J. O. 1972. Principle of maximum entropy in hydrology frequency analysis. J. Hydrol. 17: 177–191.
22. Sonuga, J. O. 1976. Entropy principle applied to the rainfall–runoff process. J. Hydrol. 30: 81–94.
23. Sugawara, M. 1995. Tank Model. PP. 165-214. In. Singh, V.P. (Ed.), Computer Models of Watershed Hydrology. Water Resour. Pub., Colorado, USA.